



Diffusion Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants

Sébastien Lemaire

► To cite this version:

Sébastien Lemaire. Diffusion Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants. Physique mathématique [math-ph]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2002. Français. NNT: . tel-00005182

HAL Id: tel-00005182

<https://theses.hal.science/tel-00005182>

Submitted on 2 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diffusion Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 juin 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Bordeaux 1
(spécialité Physique)

par

Sébastien Lemaire

Composition du jury

Président : P. Quentin, Professeur, CENBG, Université Bordeaux 1

Rapporteurs : J. F. Mathiot, Directeur de Recherche CNRS, LPC, Université Clermont II
C. Semay, Chercheur FNRS, Université de Mons-Hainaut

Examineurs : J. Labarsouque, Professeur, CENBG, Université Bordeaux 1

J. Leandri, Maître de Conférence, CPMOH, Université Bordeaux 1

B. Silvestre-Brac, Chargé de Recherche CNRS, ISN, Grenoble

A mes parents,

Remerciements

Ce travail de recherche n'est pas l'oeuvre d'un seul individu. De nombreuses personnes m'ont permis de mener à bien ce projet et je tiens à les en remercier.

Mes premières pensées iront à mes parents et ma famille qui m'ont toujours soutenu, encouragé et supporté pendant ces années de thèse.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de thèse Monsieur J. Labarsouque d'avoir bien voulu accepter la responsabilité de ma formation. Sa constante disponibilité, la qualité de ses conseils dans de nombreux domaines et son soutien moral pendant les moments difficiles que rencontre tout jeune chercheur m'ont permis de réaliser ce travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur B. Silvestre-Brac tant pour sa contribution au développement des idées décrites dans ce mémoire que pour son soutien et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ces années de thèse.

Je désire vivement remercier Monsieur J. F. Mathiot ainsi que Monsieur C. Semay qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps à la lecture de mon manuscrit et à la rédaction d'un rapport sur mes travaux.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur P. Quentin pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant ce jury, mais aussi pour m'avoir accueilli aussi chaleureusement au sein du groupe de physique théorique et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans mes démarches d'avant et d'après thèse. Je remercie également Monsieur J. Léandri, rapporteur de soutenance, qui a accepté de faire parti de mon jury de thèse.

Je voudrais remercier tous les membres du CENBG qui contribuent, par leur bonne humeur, à créer un cadre de travail agréable.

Un chercheur n'est rien sans une équipe, c'est pourquoi je voudrais remercier tout particulièrement les membres du groupe de physique théorique qui ont contribué à son atmosphère de confiance et à son dynamisme. Je remercie notamment Monsieur J. Donohue et Monsieur J. C. Caillon qui n'ont pas compté leur temps pour me rendre service et m'apporter leurs connaissances scientifiques chaque fois que je les ai sollicités.

Merci à tous mes collègues thésards, en particulier Cécile pour sa profonde amitié et son enthousiasme toujours débordant qui ont été pour moi source d'énergie, sans oublier Christine (merci pour les figures), mon partenaire de double Cédric, David, Hristo, Ludo, Manu, Mickael, Roland et "Bob"...

Je pense également à tous mes amis du tennis et d'ailleurs pour qui les quarks n'ont plus de secrets !

A "Titi".

Résumé

Nous avons étudié l'interaction Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants pour une impulsion du Kaon comprise entre 0 et 1 GeV/c dans le référentiel du laboratoire. Cette étude est motivée par le fait que le modèle d'échange de mésons de Bonn, pour reproduire correctement les déphasages K^+ -Nucléon dans l'onde s, doit nécessairement contenir la contribution d'un méson scalaire fictif répulsif dont la courte portée (≈ 0.8 fm) laisserait penser à des effets de quarks. Le processus de diffusion a été traité dans le cadre de la Méthode du Groupe Résonnant (RGM). Nous devons faire face à un problème à 5 corps avec nécessité d'antisymétriser par rapport aux 4 quarks non étranges du système Kaon-Nucléon. Une contrainte essentielle de notre approche est d'utiliser une interaction quark-quark qui reproduit correctement le spectre des hadrons. Nous avons étudié en particulier l'influence d'une cinématique relativiste pour les quarks dans le traitement de la réaction. L'étude a également inclus les ondes s, p, d, f, g et nous avons pris en compte les termes spin-orbite dans l'interaction quark-quark. Nous avons enfin regardé l'influence de termes de moyenne et longue portée dans l'interaction quark-quark sur les déphasages Kaon-Nucléon.

Mots-clés: Diffusion Kaon-Nucleon ; Modèles de quarks constituants, Echanges de mésons

Abstract

We have investigated Kaon-Nucleon interaction in a constituent quark model in the momentum range for the Kaon between 0 and 1 GeV/c in the laboratory frame. This study has been motivated by the fact that in an approach relying on a boson exchange mechanism the Bonn group was forced, in order to obtain good agreement with $I = 0$ s-wave phase shifts, to add the exchange of a short range fictitious repulsive scalar meson. This need for repulsion, whose range (~ 0.2 fm) is smaller than the nucleon radius, clearly shows that the quark substructure of the nucleons and K^+ mesons cannot be neglected. The Kaon-Nucleon phase shifts are calculated in a quark potential model using the resonating group method (RGM). We have to cope with a five body problem with antisymmetrization with respect to the four ordinary quarks of the Kaon-Nucleon system. One requirement of our approach is that the quark-quark interaction must give a quite good description of the hadron spectra. One goal of the present work aims at determining the influence of a relativistic kinematics, in this constituent quark model, for the calculation of KN phase shifts. We have also investigated s, p, d, f, g waves KN elastic phase shifts and we have included a spin-orbit term in the quark-quark interaction. Then we have studied the influence of medium and long range exchange mechanism in the quark quark interaction on KN phase shifts.

Keywords: KN scattering ; Constituent quark model ; Meson exchange

Table des matières

Table des figures	1
Liste des tableaux	3
Introduction	5
1 Généralités sur la diffusion Kaon-Nucléon	9
1.1 Une sonde nucléaire profonde : le Kaon	9
1.2 Aspects expérimentaux de la diffusion Kaon-Nucléon	11
1.3 Approches théoriques de la diffusion Kaon-Nucléon	15
1.3.1 Modèles d'échanges de bosons	15
1.3.2 Modèles tenant compte des degrés de liberté de quarks	18
2 Formalisme de la diffusion Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants	21
2.1 Propriétés internes de chaque agrégat	22
2.1.1 Potentiels interquarks	22
2.1.2 Hamiltoniens et fonctions d'ondes	27
2.2 Système Kaon-Nucléon	34
2.3 Equation de la diffusion	37
2.4 Déphasages	40
3 Influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN	43
3.1 Potentiel interquark, paramètres des fonctions d'onde et masses	43
3.2 Influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages en onde S	45
3.3 Extension aux ondes P, D, F, G	47

4 Déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G avec une cinématique non relativiste et une interaction spin-orbite	51
4.1 Potentiel interquark, paramètres des fonctions d'onde et masses	51
4.2 Déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G	54
5 Influence de termes de moyenne et longue portée sur les déphasages KN	65
5.1 Potentiel interquark	65
5.2 Paramètres des fonctions d'onde et masses	67
5.3 Déphasages KN	68
Conclusion	75
A Récapitulatif des noyaux intervenant dans l'équation de Hill-Wheeler	77
A.1 Noyaux de norme	77
A.2 Noyaux d'énergie	77
A.2.1 Cinématique non relativiste	78
A.2.2 Cinématique relativiste	85
B Calcul d'un noyau d'énergie cinétique relativiste d'échange	93
C Exemple de calcul des termes centraux et hyperfins d'un noyau d'énergie potentielle d'échange	103
C.1 Partie centrale	103
C.2 Partie hyperfine	104
D Calcul d'un terme spin-orbite d'un noyau d'énergie potentielle d'échange	109
D.1 Rappel sur les opérateurs tensoriels	109
D.2 Noyau spin-orbite d'échange	112
D.2.1 Partie spin	114
D.2.2 Partie espace	116
Bibliographie	125

Table des figures

1.1	Sections efficaces totales de diffusion K^-N et K^+N pour les canaux d'isospin $I=0,1$ pour une impulsion incidente inférieure à 1.1 GeV/c. Les données viennent de Brookhaven [7].	10
1.2	Formation de résonances dans l'interaction K^+-N et K^-N	11
1.3	Libre parcours moyen de quelques sondes hadroniques dans la matière nucléaire en fonction de p_{Lab} [8].	13
1.4	Section efficace totale de diffusion K^+ -Nucléon pour les canaux d'isospin $I = 0, 1$ dans le domaine de basse énergie. Les données viennent de Brookhaven [10] et les courbes d'une analyse en déphasage faite par B. R. Martin [11].	14
1.5	Section efficace élastique, totale et de création de pions pour la réaction K^+p donnée par R. W. Bland et al. [9].	16
1.6	Section efficace totale et inélastique de diffusion K^+ -Nucléon pour les canaux d'isospin $I = 0, 1$ dans le domaine d'énergie $p_{Lab} \leq 1.5$ GeV/c. Les données viennent de Carroll et al. [10] et les courbes d'un ajustement théorique de B. R. Martin [11].	17
2.1	Mécanisme d'échange d'un gluon entre deux quarks.	23
2.2	Auto-couplage de 3 et 4 gluons	24
2.3	Mécanisme d'interaction de deux quarks à grande distance.	25
2.4	Coordonnées de Jacobi du kaon	27
2.5	Coordonnées de Jacobi du nucléon	31
2.6	Coordonnées de Jacobi du système kaon-nucléon	34
3.1	Déphasages relativistes KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire comparés à ceux obtenus à partir d'une cinématique non relativiste (NR). Les triangles et les cercles correspondent respectivement aux analyses en déphasage de Hyslop et al. [38] et Hashimoto [39].	46

3.2	Déphasages non relativistes KN pour les ondes P, D, F, G en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire. Les courbes en trait plein et tiretés sont les résultats obtenus pour 1 et 3 gaussiennes dans le canal d'isospin $I = 0$. Dans la voie $I = 1$, la courbe en pointillés représente le résultat pour une gaussienne et celle en tiretés-points les résultats avec 3 gaussiennes (pour les ondes P, D) et 2 gaussiennes (pour les ondes F et G à cause d'un temps de calcul prohibitif).	47
4.1	Déphasages KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire pour une gaussienne (ligne en traits pleins) et deux gaussiennes (ligne en traits pointillés). Les données expérimentales sont issues de [38, 39]. Le premier indice se réfère au nombre quantique d'isospin et le second à deux fois le moment angulaire total.	55
4.2	Déphasages KN pour l'onde P. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1. . . .	56
4.3	Déphasages KN pour l'onde D. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1. . . .	57
4.4	Déphasages KN pour l'onde F. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1. . . .	58
4.5	Déphasages KN pour l'onde G. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1. . . .	59
4.6	Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde S. .	60
4.7	Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde P. .	61
4.8	Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde D. .	62
4.9	Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde F. .	63
5.1	Déphasages KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire pour une gaussienne (ligne en traits pleins). Les déphasages obtenus au chapitre 2 sont donnés pour comparaison en traits pointillés. Les données expérimentales sont issues de [38, 39]. Le premier indice se réfère au nombre quantique d'isospin et le second à deux fois le moment angulaire total.	69
5.2	Déphasages KN pour l'onde P. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1. . . .	70
5.3	Déphasages KN pour l'onde D. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1. . . .	71
5.4	Déphasages KN pour l'onde F. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1. . . .	72
5.5	Déphasages KN pour l'onde G. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1. . . .	73

Liste des tableaux

1.1	Energies, largeurs, nombres quantiques et mode de décroissance dominant de quelques résonances Y^*	12
1.2	Données expérimentales sur la diffusion Kaon-Nucléon.	15
3.1	Paramètres de la force interquark dans le cas où la cinématique prise pour les quarks est relativiste (R) ou bien non relativiste (NR) avec $i=(uu)$, (dd) , (ud) et $j=(u\bar{s})$, $(d\bar{s})$	43
3.2	Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs calculées par R. Ceuleneer et C. Semay [60], la deuxième ligne se réfère aux valeurs calculées par B. Silvestre-Brac et C. Semay [55] et la troisième ligne aux valeurs expérimentales.	44
3.3	Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 , α_i en GeV^2 et c_i en $GeV^{\frac{3}{2}}$, γ_i en GeV^2) obtenus pour une fonction d'onde d'espace du nucléon et du kaon développées sur n gaussiennes et pour les deux types de cinématique : relativiste ou non relativiste.	49
4.1	Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs obtenues par le calcul et celle du bas aux valeurs expérimentales.	52
4.2	Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 et α_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du nucléon obtenu dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks et pour n gaussiennes.	53
4.3	Paramètres variationnels (c_i en $GeV^{\frac{3}{2}}$ et γ_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du kaon obtenu dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks et pour n gaussiennes.	54
4.4	Longueurs de diffusion et portées effectives (obtenue à partir de l'onde S) (en fm) et volumes de diffusion (fm^3) pour l'onde P dans le cadre de notre modèle de quarks constituants et pour les deux canaux d'isospin $I = 0$ et $I = 1$	62
4.5	Longueurs de diffusion pour l'onde S (en fm) et volumes de diffusion (fm^3) pour l'onde P issus d'analyses en déphasage dans le canal d'isospin $I = 0$ pour la diffusion K^+N	63

4.6	Longueurs de diffusion et portées effectives pour l'onde S (en fm) et volumes de diffusion (fm^3) pour l'onde P issus d'analyses en déphasage dans le canal d'isospin $I = 1$ pour la diffusion K^+N	64
5.1	Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs calculées par Fernandez et al. [75] et la deuxième aux valeurs expérimentales.	67
5.2	Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 et α_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du nucléon obtenus dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks avec échange de champs mésoniques et pour 1 gaussienne. . . .	67
5.3	Paramètres variationnels (c_i en $GeV^{\frac{3}{2}}$ et γ_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du kaon obtenus dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks avec échange de champs mésoniques et pour 1 gaussienne. . . .	68

Introduction

La quête des physiciens vers une meilleure compréhension des systèmes subatomiques se fait en majeure partie au travers de l'utilisation de sondes judicieusement choisies via la mesure de sections efficaces, de polarisations etc ...

Pour ce qui concerne l'étude des noyaux et du comportement des hadrons dans les noyaux, parmi les nombreuses sondes utilisées nous pouvons citer celles à caractères électromagnétiques (e^+ , e^- , γ , μ^+ , μ^-) ou bien hadroniques (p , \bar{p} , n , π , K , α , deuteron, ions lourds) chacune permettant d'apporter, suivant son mode d'interaction, des informations différentes.

Ces dernières années les physiciens nucléaires se sont intéressés à l'utilisation des mésons K . Ce sont notamment les propriétés des mésons K^+ qui font de cette particule étrange une sonde hadronique particulièrement profonde permettant d'atteindre les régions hautes densités des noyaux. Cette sonde serait donc sensible à d'éventuelles modifications des propriétés des nucléons et des mésons dans les noyaux comme par exemple un déconfinement partiel des quarks ou une restauration partielle de la symétrie chirale. Pour obtenir des informations fiables à ce sujet, une connaissance précise de l'interaction de cette sonde avec le noyau et tout d'abord avec les constituants de ce noyau (les nucléons) est nécessaire.

Parmi les études les plus élaborées de l'interaction kaon-nucléon, une étude phénoménologique, réalisée par le groupe de Bonn [1] et reposant sur le mécanisme d'échange de bosons conclut sur la nécessité soit de changer les constantes de couplage des valeurs habituellement prises soit d'introduire l'échange d'un méson scalaire fictif répulsif de courte portée afin de reproduire les déphasages kaon-nucléon pour l'onde S dans le canal d'isospin $I = 0$. La portée de ce méson scalaire fictif de l'ordre de 0.2 fm, qui est inférieure au rayon du nucléon, montre clairement que la sous-structure en quarks du nucléon et du méson K ne peut être négligée.

Il est généralement admis maintenant que l'interaction responsable de la cohésion des noyaux et des hadrons, l'interaction forte, est décrite par une théorie de jauge non abélienne que l'on nomme la chromodynamique quantique ou QCD. Celle-ci considère que les hadrons (particules sensibles à l'interaction forte) sont constitués de quarks et que leur interaction mutuelle provient de l'échange de "charges colorées" portées par ces quarks (triplets de couleur). Il existe 6 saveurs de quarks : up(u), down(d), strange(s), charm(c), bottom(b) et top (t). L'invariance de cette théorie sous une transformation de jauge locale agissant sur les degrés de liberté de couleur impose l'introduction d'un champ de bosons vecteurs (octet de gluons) de masse nulle qui sont les médiateurs de l'interaction. Une conséquence de cette invariance est l'existence d'autocouplages à trois et quatre gluons

qui pose des difficultés importantes quant au traitement de l'interaction forte aux basses énergies (régime non perturbatif).

La preuve de la renormalisabilité des développements perturbatifs de la QCD a permis de montrer que les constantes de couplage ne sont pas constantes mais évoluent lentement avec l'énergie du processus étudié. De plus, il a été montré que si le groupe était non-abélien, les couplages diminuent quand l'énergie augmente. La QCD, basée sur le groupe $SU(3)$ de couleur entre parfaitement dans ce cadre. Le comportement de la constante de couplage quark-gluon ($\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$) qui dépend de la quadri-impulsion transférée Q (calcul à l'ordre d'une boucle) est donné par :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})} \quad (1)$$

avec N_c , N_f les nombres de couleur et de familles de quarks et Λ une échelle caractéristique de la QCD comprise entre 100 MeV et 200 MeV. Cette constante de couplage est caractérisée par le fait qu'elle tend vers zéro dès que $Q \rightarrow \infty$ ou bien $r \rightarrow 0$ c'est-à-dire que les quarks n'interagissent plus entre eux à faible distance (liberté asymptotique).

Une approche fondamentale, ou théorie sur réseau, qui essaie de résoudre les équations du mouvement en discrétisant l'espace-temps, a permis de montrer que le potentiel d'interaction entre un quark et un anti-quark se comporte de façon coulombienne à faible distance et de façon linéaire à grande distance. Ce constat, que l'on appelle confinement, traduit le fait qu'aucun quark libre n'a jamais pu être observé. Cette théorie sur réseau reste cependant limitée à des systèmes physiques élémentaires et est encore inenvisageable actuellement pour des systèmes comme K-nucléon.

Parmi les différentes approches phénoménologiques de la QCD il faut distinguer :

- Les modèles de Skyrmons [2], qui sont une limite de l'application de la QCD aux faibles énergies, considèrent le nombre de couleurs comme infini. L'espoir est alors que les propriétés essentielles d'une telle théorie soient conservées dans le cas réel $N_c = 3$. Il a été montré qu'à basse énergie dans un développement en $\frac{1}{N_c}$ et pour $N_c \rightarrow \infty$ les diagrammes planaires avec des lignes $q\bar{q}$ sont dominants. Dans ce type d'approche la QCD se réduit effectivement à une théorie de champ de mésons dans laquelle les degrés de liberté de quarks ont disparu. La dynamique est alors décrite par un lagrangien effectif local et non linéaire grâce auquel les baryons émergent comme les solitons topologiques des équations non linéaires des champs. Ce type de modèle s'avère cependant limité dès que l'on incorpore la notion d'étrangeté.
- Les modèles de sacs (MIT, petit sac, sac nuageux ...) [3] mettent en avant la notion de confinement et de liberté asymptotique. Ce sont des modèles relativistes où les quarks sont indépendants à l'intérieur des sacs. Cependant ces types de modèles ne respectent pas l'invariance par translation et génèrent un mouvement parasite du centre de masse que l'on ne sait pas traiter rigoureusement.
- Les modèles non relativistes [4] ou modèles de quarks constituants prennent pour ingrédient de base des potentiels phénoménologiques issus d'une réduction non relativiste de l'échange d'un gluon entre deux quarks. La partie confinante de l'interaction interquark est introduite à la main, sa forme s'inspirant de résultats de QCD sur réseau. Ces potentiels sont introduits dans une équation de Schrödinger

afin de déterminer la dynamique du système. Une telle formulation n'est pas covariante mais le mouvement du centre de masse peut être traité correctement. De tels modèles sont bien adaptés pour étudier des systèmes à peu de particules à basse énergie et ont remporté des succès assez inattendus dans la description du spectre des hadrons.

Dans ce travail, nous avons réalisé une étude de la diffusion kaon-nucléon dans un modèle de quarks constituants. Plusieurs calculs de déphasages kaon-nucléon, prenant en compte cette sous-structure en quarks, ont déjà été menés par le passé dans le cadre de modèles de quarks constituants. Les déphasages expérimentaux sont connus à basse énergie ($P_{lab} \leq 2.5$ GeV/c) jusqu'aux ondes $L = 4$ mais jusqu'à présent aucun des travaux déjà réalisés sur la diffusion KN en termes de quarks constituants n'arrive à reproduire correctement les valeurs expérimentales des déphasages pour les ondes S et P (dans les deux voies d'isospin). En ce qui concerne les ondes D, F, G, elles n'ont encore jamais été étudiées dans des modèles de quarks.

Afin d'améliorer notre compréhension de cette interaction, il nous a paru important d'isoler les imperfections venant d'approximations de celles venant d'une mauvaise description physique.

Dans ce travail nous avons essayé de réduire autant que possible les approximations numériques mais aussi veillé à garder une cohérence entre la dynamique des quarks à l'intérieur de chaque cluster et entre chacun des deux clusters. Pour cela, nous avons basé notre travail sur trois conditions importantes.

1. La même interaction entre quarks est utilisée pour construire les fonctions d'ondes du kaon et du nucléon ainsi que pour générer la dynamique du système KN.
2. Cette interaction quark-quark doit donner une bonne description du spectre des mésons et des baryons.
3. La fonction d'onde relative du système KN est laissée complètement libre de prendre la forme imposée par la dynamique du système KN. Aucune paramétrisation n'a été supposée a priori.

Jusqu'à maintenant une bonne description de chacun des deux canaux d'isospin $I = 0$ et $I = 1$ n'a pas encore été obtenue. Cette apparente difficulté à reproduire les faits expérimentaux pose le problème de la validité d'un tel modèle. En effet, bien qu'il donne une bonne description du spectre des mésons et des baryons, il repose sur un certain nombre d'approximations qu'il serait utile de tester. L'une d'entre elle est l'utilisation d'une cinématique non relativiste pour les quarks.

Ainsi, après la présentation de quelques propriétés des mésons K nous étudierons l'influence d'une cinématique relativiste, dans ce modèle de quarks constituants, sur les déphasages kaon-nucléon pour l'onde S. Nous verrons que l'effet est plutôt faible pour cette onde. Si nous admettons que la cinématique des quarks de chaque agrégat est la même pour une diffusion dans un état S que pour un état $L > 0$ et sachant que l'influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN pour une onde S reste modeste, nous calculerons les déphasages kaon-nucléon pour des ondes plus élevées (S, P, D, F, G). L'absence de terme spin-orbite ou tenseur dans la force interquark utilisée empêchera la comparaison directe avec l'expérience car il ne sera pas possible de distinguer les voies

$J = L + \frac{1}{2}$ et $J = L - \frac{1}{2}$. C'est la raison pour laquelle nous construirons ensuite une force quark-quark contenant un terme spin-orbite et reproduisant de manière convenable le spectre des mésons et des baryons afin de pouvoir comparer nos résultats directement à l'expérience. Jusqu'à maintenant nous n'avons pris en compte que l'échange de termes de courte portée (échange de gluons) dans l'interaction quark-quark. Il serait intéressant pour finir d'inclure les contributions de termes de moyenne et longue portée dans l'interaction et de regarder leur influence sur les déphasages kaon-nucléon. Pour terminer nous ferons le bilan des résultats obtenus à l'issue de ce travail.

Chapitre 1

Généralités sur la diffusion

Kaon-Nucléon

Les kaons et les antikaons sont des mésons étranges de masse $\approx 500 \text{ MeV}/c^2$ qui se partagent en deux isodoublets d'étrangeté opposées : (K^+, K^0) avec $S = +1$ et (K^-, \bar{K}^0) avec $S = -1$. Ils forment avec le triplet des Pions (π^+, π^0, π^-) et le méson η l'octet des mésons pseudo-scalaires ($J^\pi = 0^-$).

1.1 Une sonde nucléaire profonde : le Kaon

L'interaction du méson K^+ avec la matière nucléaire est bien différente de celle de son antiparticule le méson K^- . La section efficace de diffusion K^-N possède une valeur typique des valeurs obtenues lors de réactions mettant en jeu des processus hadroniques soit $\sigma_T \simeq 40 \text{ mb}$. Cette dernière a été mesurée expérimentalement dans les deux états d'isospin $I = 0$ et $I = 1$ pour $p_{Lab} \leq 1 \text{ GeV}/c$ (Fig. 1.1). Sa forte variation avec l'énergie révèle la présence de nombreuses résonances baryoniques Y_0^* et Y_1^* (Λ, Σ) d'étrangeté $S = -1$ dans les deux voies d'isospin. De telles résonances sont constituées de 2 quarks ordinaires et d'un quark étrange (Fig. 1.2) résultant de l'annihilation du quark u de valence du proton avec celui \bar{u} du K^- . Les énergies, largeurs et nombres quantiques les définissant sont donnés Table 1.1. La forte section efficace du K^- fait que son libre parcours moyen dans la matière nucléaire est faible (Fig. 1.3) et que son interaction reste essentiellement localisée en périphérie des noyaux. C'est ainsi qu'il est possible d'extraire des données expérimentales sur les densités nucléaires (protons et neutrons) dans les régions de surface des noyaux (tout comme on peut le faire avec les particules \bar{p}, π^-). Par exemple, ce méson étrange peut être capturé par les orbites atomiques de Bohr et c'est la cascade de désexcitation du K^- vers le noyau atomique qui entraîne des transitions γ ou Auger que l'on peut observer.

Au contraire de l'interaction K^-N , l'interaction K^+N est faible, $\sigma_T \simeq 10 \text{ mb}$ pour $p_{Lab} \leq 800 \text{ MeV}/c$ (Fig. 1.1), et variant peu dans la gamme d'énergie $p_{Lab} \leq 700 \text{ MeV}/c$ comme nous pouvons le voir sur la Figure 1.4. Cette réaction est alors essentiellement élastique à ces énergies, malgré l'ouverture du seuil de création d'un pion pour $p_{Lab} \approx 525 \text{ MeV}/c$, et tant que l'on se situe sous les seuils de production $K\Delta(1236)$ et $K^*(890)N$ qui

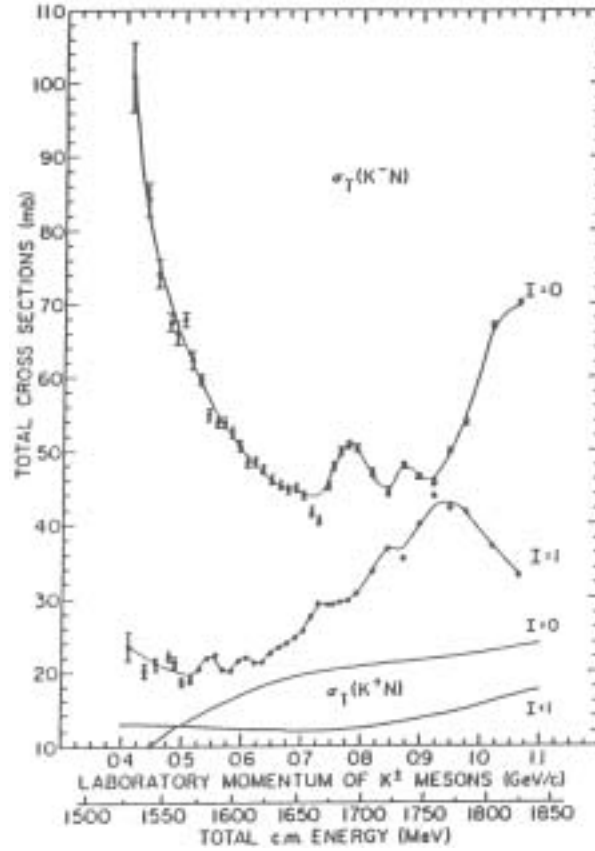
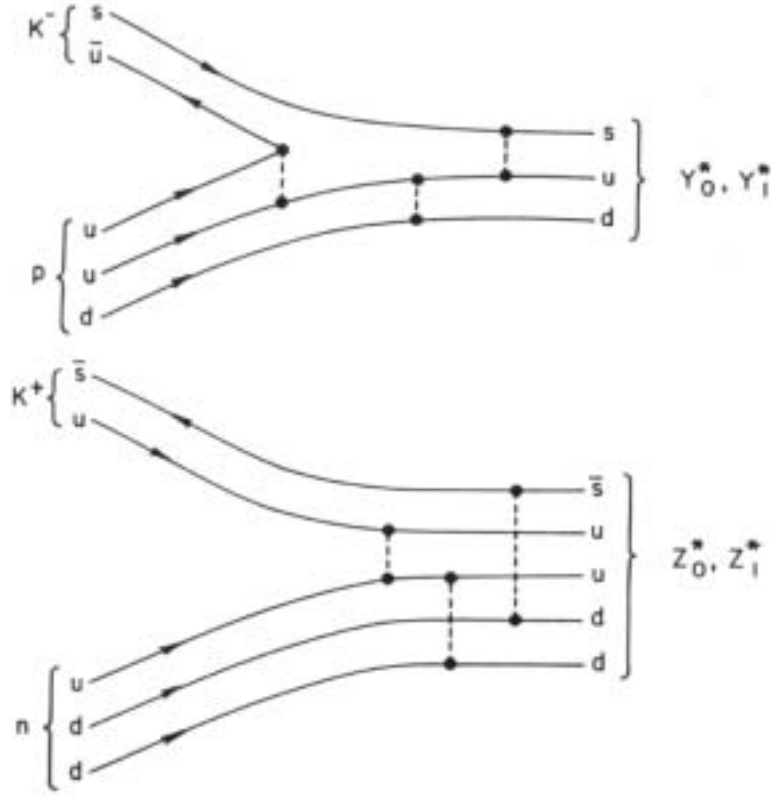


FIG. 1.1 – Sections efficaces totales de diffusion K^-N et K^+N pour les canaux d'isospin $I=0,1$ pour une impulsion incidente inférieure à 1.1 GeV/c. Les données viennent de Brookhaven [7].

se situent, rappelons-le, à 870 MeV/c et 1075 MeV/c respectivement. Ce sont ces deux canaux qui dominent la section efficace inélastique de diffusion K^+N au dessus de 1.5 GeV/c comme le montre la figure 1.5. Aucune résonance Y^* n'est possible à partir de cette réaction par simple conservation de l'étrangeté. A plus haute énergie ($p_{Lab} \geq 700$ MeV/c), l'accroissement rapide de la section efficace laisse entrevoir l'existence (encore controversée) de résonances "exotiques" d'étrangeté $S = +1$, appelées résonances Z_0^* , Z_1^* (les sections efficaces totales et inélastiques sont données Fig. 1.4, 1.6). Celles-ci auraient une structure à 5 quarks ($Q^4\bar{Q}$ voir Fig. 1.2) plus complexe que celle du Y^* et seraient accessibles à des énergies plus hautes ($p_{lab} \gtrsim 800$ MeV). Il ressort du comportement en énergie de l'interaction K^+-N un libre parcours moyen du méson K^+ dans la matière nucléaire, compris entre 5 fm et 7 fm pour $p_{lab} \lesssim 800$ MeV/c (Fig 1.3), qui font de cette particule une sonde particulièrement profonde des noyaux [5, 6]. Son intérêt réside entre autre dans le fait qu'elle ne génère que peu d'ambiguïté quant au mécanisme réactionnel dans la gamme d'énergie $p_{lab}^{K^+} \lesssim 800$ MeV/c, contrairement aux autres projectiles hadroniques tels que le K^- ou bien le π^\pm .

FIG. 1.2 – Formation de résonances dans l'interaction K^+-N et K^--N .

1.2 Aspects expérimentaux de la diffusion Kaon-Nucléon

Contrairement aux travaux utilisant comme projectile des pions ou bien des protons, les premières expériences de diffusion Kaon-Nucléon mettaient en jeu des K^- d'énergie intermédiaire et traitaient essentiellement de la formation d'hypernoyaux (ce sont des noyaux dans lesquels un nucléon a été remplacé par un hyperon tel que la particule Lambda). L'exploitation de la composante en méson K^+ des faisceaux de kaons a permis d'étendre le champ d'étude aux régions internes des noyaux grâce à la diffusion élastique $K^+-\text{Nucléon}$.

Parmi les grands centres capables de produire des faisceaux de kaons, nous pouvons citer le laboratoire national de Brookhaven où est installé l'AGS (Alternating Gradient Synchrotron). La production de kaons est réalisée grâce à des protons de 200 MeV d'énergie provenant d'un LINAC qui sont injectés et accélérés dans un anneau de 256 mètres de diamètre à des énergies de 30 GeV (4×10^{12} protons par seconde toutes les 2.2 secondes) puis finalement acheminés vers de nombreuses cibles. Les kaons sont alors produits via la

State	$L_{I,2J}$	Γ (MeV)	Dominant channel
$\Sigma(1385)$	P_{13}	35–40	$\Lambda\pi$
$\Lambda(1405)$	S_{01}	40	$\bar{K}N$
$\Lambda(1520)$	D_{03}	15	$\bar{K}N, \Sigma\pi$
$\Lambda(1600)$	P_{01}	60	$\Sigma\pi, \bar{K}N$
$\Sigma(1660)$	P_{11}	50–100	$\Sigma\pi$
$\Lambda(1670)$	S_{01}	25–50	$\Sigma\pi$
$\Sigma(1670)$	D_{13}	50–60	$\Sigma\pi$
$\Lambda(1690)$	D_{03}	30–80	$\Sigma\pi, \bar{K}N$
$\Sigma(1750)$	S_{11}	60–100	$\bar{K}N$
$\Sigma(1765)$	D_{15}	120	$\bar{K}N$
$\Lambda(1815)$	F_{05}	70–100	$\bar{K}N$
$\Lambda(1830)$	D_{05}	60–100	$\Sigma\pi$
$\Sigma(1840)$	P_{13}	120	$\bar{K}N$
$\Lambda(1860)$	P_{03}	40–100	$\bar{K}N$
$\Sigma(1915)$	F_{15}	70–130	mixed
$\Sigma(1940)$	D_{13}	100–300	mixed
$\Sigma(2030)$	F_{17}	100–200	mixed
$\Lambda(2100)$	G_{07}	100–200	$\bar{K}N$
$\Lambda(2110)$	F_{05}	140–200	$\Sigma\pi, \bar{K}N$

TAB. 1.1 – Energies, largeurs, nombres quantiques et mode de décroissance dominant de quelques résonances Y^* .

réaction :

$$P + N \longrightarrow P + N^*$$

$$N^* \longrightarrow \Lambda + K^+$$

ou

$$N^* \longrightarrow N + K^+ + K^-$$

Il faut souligner le fait que les kaons ne peuvent être produits qu'en faisceaux secondaires. Ce constat vient du fait que leur temps de décroissance par interaction faible est inférieur au temps nécessaire pour les accélérer et les produire en faisceaux primaires.

Cet accélérateur crée ainsi un faisceau secondaire de kaons d'énergie 800 MeV/c qui sont acheminés vers des cibles via un spectromètre (utilisé pour mesurer l'impulsion des kaons du faisceau) et des aimants. Les kaons sont produits par bouffées de 60 000 K^+ et 20 000 K^- pendant une durée d'une seconde, et ce, toutes les 2.2 secondes. Le taux de particules parasites (en majorité des pions) de ce faisceau est de 12 : 1 pour les K^- et de 4 : 1 pour les K^+ . Les cibles utilisées pour étudier la diffusion kaon-nucléon sont du dihydrogène (H_2) ou du deuterium suivant le canal d'isospin que l'on souhaite étudier. Une fois diffusés par la cible, les kaons passent à travers un second spectromètre magnétique

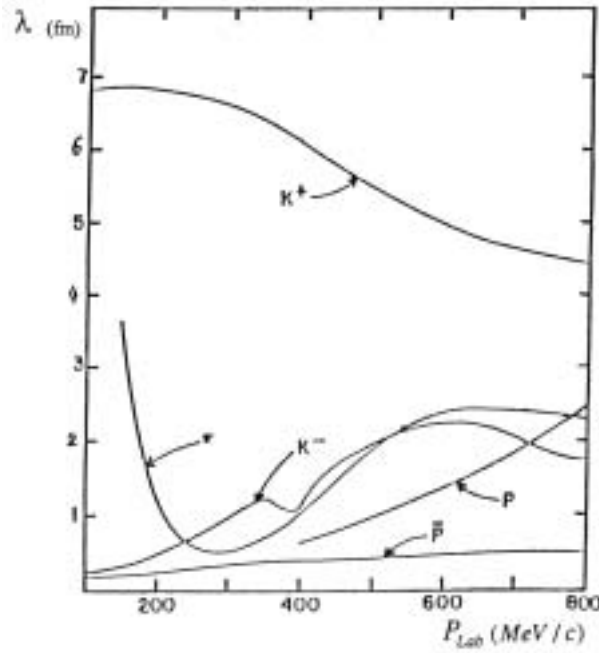


FIG. 1.3 – Libre parcours moyen de quelques sondes hadroniques dans la matière nucléaire en fonction de p_{Lab} [8].

qui mesure leur impulsion. La mesure est limitée entre un angle avant de 3.5° (de façon à éviter les interférences avec le faisceau de kaons non diffusé) et un angle maximum de 36.5° (au-delà duquel le taux de comptage chute brutalement). Il faut insister sur le fait que le système kaon-nucléon possède deux canaux d'isospin ($I = 0$ et $I = 1$) accessibles par l'intermédiaire des réactions élastiques K^+-n et K^+-p . Cependant, contrairement à cette dernière réaction, l'étude de la diffusion K^+-n se heurte au fait qu'aucune cible de neutrons n'existe. Cette difficulté est en partie contournée par l'utilisation de cibles de deutrons mais génère des difficultés quant à l'extraction de l'amplitude K^+-n . Les incertitudes expérimentales seront donc beaucoup plus grandes dans la voie $I = 0$ que dans la voie $I = 1$.

En plus de l'expérience que nous venons de décrire, d'autres, utilisant des faisceaux de kaons, ont également contribué à compléter les données existantes sur l'interaction K^+-N par des mesures de section efficace de diffusion et de polarisation dans une large gamme d'énergie. Elle furent réalisées en partie dans plusieurs grands centres tels que le Cern, le laboratoire de Rutherford ou bien le laboratoire national KEK de physique des hautes énergies et utilisaient des techniques similaires à celles décrites précédemment. Un bilan des différentes études expérimentales concernant la diffusion Kaon-Nucléon est donné dans la Table 1.2.

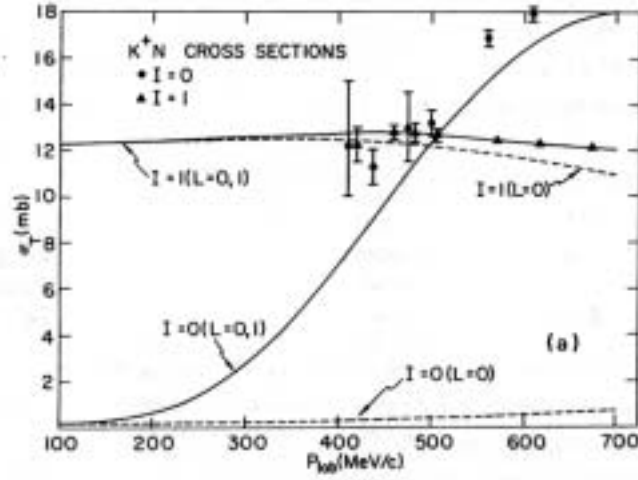


FIG. 1.4 – Section efficace totale de diffusion K^+ -Nucléon pour les canaux d'isospin $I = 0, 1$ dans le domaine de basse énergie. Les données viennent de Brookhaven [10] et les courbes d'une analyse en déphasage faite par B. R. Martin [11].

Réaction	Observable	Gamme d'énergie en MeV	Référence
Données aux angles avant			
$K^+p \longrightarrow K^+p$	σ_{tot}	140-642	[12]
		130-755	[13]
		455	[14]
$K^+n \longrightarrow K^+n$	σ_{tot}	522-1078	[15]
$K_L^0 p \longrightarrow K^+ n$	σ_{el}	132	[16]
	σ_{tot}	149-680	[10]
	σ_{in}	502-958	[17]
		315-1095	[18]
	$Re(f)$	39-1086	[19]
Données angulaires			
$K^+n \longrightarrow K^+n$	$\sigma(\theta)$	621-1086	[20]
	$P(\theta)$	490-945	[11]
$K_L^0 p \longrightarrow K^+ n$	$\sigma(\theta)$	303-555	[21]
		322-1038	[22]

Suite du tableau page suivante ...

Réaction	Observable	Gamme d'énergie en MeV	Référence
$K^+ n \longrightarrow K^0 p$	$P(\theta)$	283	[23]
		490-945	[13]
$K^+ d \longrightarrow K^0 pp$	$\sigma(\theta)$	100-456	[24]
		283	[23]
		502-958	[25]
		314-1095	[26]
		163-564	[27]
		60-273	[28]
$K^+ d \longrightarrow K^+ np$	$\sigma(\theta)$	354-524	[29]
		863-1364	[30]
		127-231	[31]
		314-1095	[32]
		163-564	[27]
$K^+ d \longrightarrow K^+ d$	$\sigma(\theta)$	107-273	[28]
		314-1095	[33]
		283-524	[34]
		107-273	[28]

TAB. 1.2: Données expérimentales sur la diffusion Kaon-Nucléon.

Fin du tableau

L'analyse de ces différentes données permet de déterminer les déphasages [35, 36, 37, 38, 39] de ce type de réaction pour les deux canaux d'isospin.

1.3 Approches théoriques de la diffusion Kaon-Nucléon

De nombreux travaux théoriques ont été consacrés à l'étude de la diffusion KN. Des années 60 jusqu'aux années 80, le processus de diffusion KN était traité en termes d'échanges de bosons. A partir des années 80, plusieurs modèles prenant en compte la sous-structure en quarks de chaque particule furent introduits.

1.3.1 Modèles d'échanges de bosons

Dans ces études, la sous-structure en quarks des deux particules n'est pas prise en compte. Nous allons présenter dans ce qui suit un aperçu des différentes approches destinées à mieux comprendre l'interaction méson-nucléon dans le cadre de modèles d'échanges de bosons.

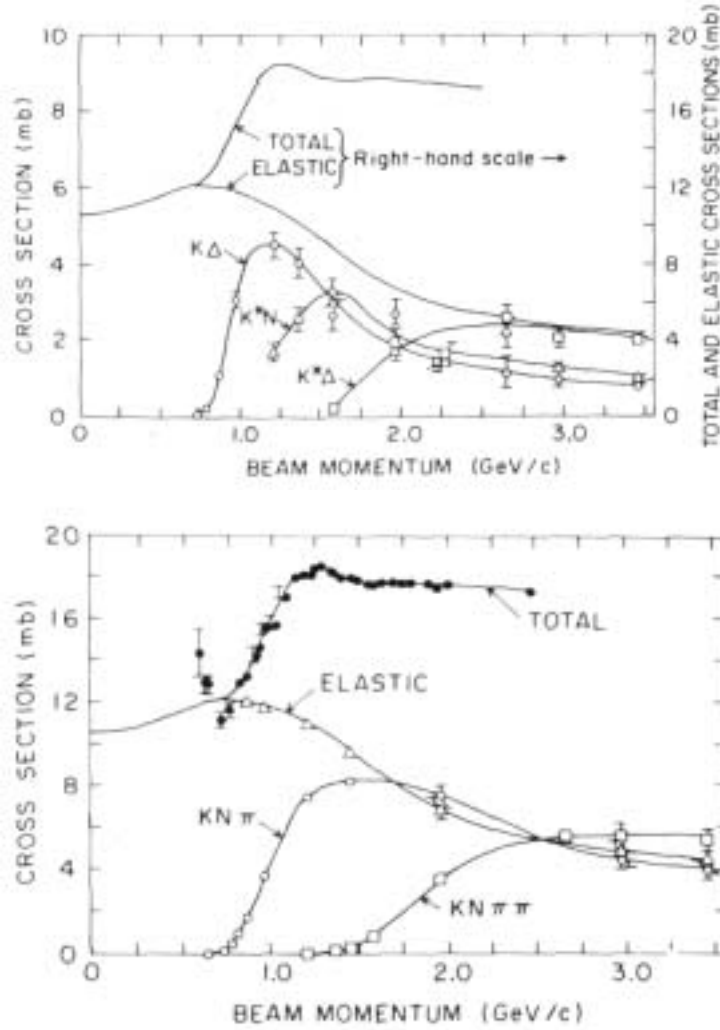


FIG. 1.5 – Section efficace élastique, totale et de création de pions pour la réaction K^+p donnée par R. W. Bland et al. [9].

Ainsi, J. W. Alcock et W. N. Cottingham [40] ont d'abord cherché à reproduire les amplitudes partielles de diffusion méson-Nucléon (Pion-Nucléon et Kaon-Nucléon) pour des moments angulaires élevés (F, G, H) dans une gamme d'impulsion du méson comprise entre 0.61 et 2.01 GeV/c dans le référentiel du laboratoire. Pour espérer décrire correctement ces ondes, ils doivent inclure des forces à longue portée telles que l'échange de deux pions (l'échange d'un pion est interdit pour les deux réactions considérées). Malgré cela, l'accord avec les résultats issus d'analyses en déphasages n'est pas convenable. Une hypothèse avancée pour expliquer le désaccord dans la réaction K^+p élastique est l'existence de contributions venant de l'échange de deux et trois pions, comme par exemple l'échange de mésons vecteurs ρ et ω .

Ils ont ensuite étendu leur étude à des impulsions du Kaon pouvant aller jusqu'à 2 GeV/c pour un moment angulaire relatif entre les deux particules $L \geq 3$ et jusqu'à 3

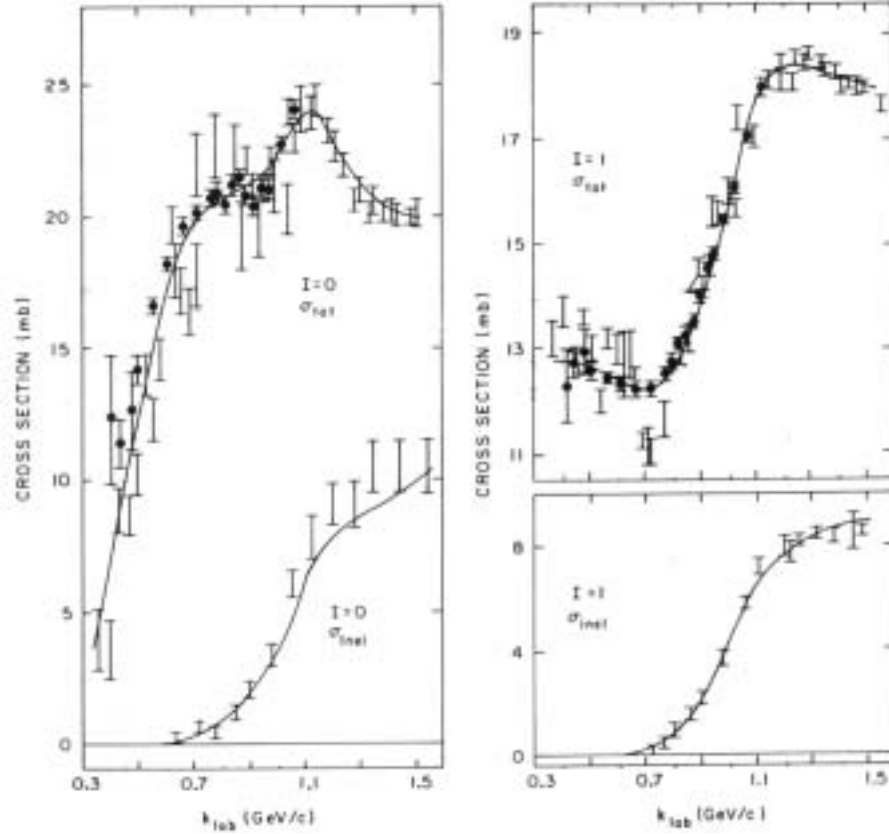


FIG. 1.6 – Section efficace totale et inélastique de diffusion K^+ -Nucléon pour les canaux d'isospin $I = 0, 1$ dans le domaine d'énergie $p_{Lab} \leq 1.5$ GeV/c. Les données viennent de Carroll et al. [10] et les courbes d'un ajustement théorique de B. R. Martin [11].

GeV/c pour $L \geq 4$ [41]. Ils ont incorporé dans le processus de diffusion les contributions des mésons ρ , ω et ϕ afin de simuler l'échange de deux et trois pions. Dans ce travail, ils ont notamment déterminé l'influence de différents paramètres dans leur modèle sur les amplitudes partielles K^+p .

Par la suite, A. C. Davis, W. N. Cottingham et J. W. Alcock [42] ont cherché à reproduire les déphasages Kaon-Nucléon issus de différentes analyses en déphasage [43, 44, 45, 46] pour les ondes S, P, D et dans la gamme d'impulsion du Kaon comprise entre 0 et 1.6 GeV/c dans le référentiel du laboratoire. Ils considèrent l'échange des mésons σ , ρ , ω et du baryon Λ et n'incluent pas, dans leur modèle, la possibilité d'ouverture de voies inélastiques. Les résultats sont qualitativement en accord avec les analyses en déphasage [43, 44, 45, 46] excepté pour les ondes S_{11} et P_{13} . Bien que qualitativement en accord avec l'expérience, l'onde S_{01} se révèle être trop attractive ce qui suggère l'introduction d'un coeur répulsif à courte portée. Malgré une amélioration apportée aux ondes S_{01} et P_{01} grâce à ce coeur, l'accord n'est pas parfait et un argument pour l'expliquer réside dans l'absence de coefficients d'inélasticité simulant l'ouverture de voies inélastiques dès que $p_{Lab} \geq 1$ GeV/c.

Nous pouvons également citer une étude de W. N. Cottingham, A. C. Davis et D. I.

Giddings [47]. Dans ce travail ils considèrent l'échange des mésons σ , ρ , ω , ϕ , de paires de pions non corrélées et du baryon Λ dans la gamme d'énergie $0.9 \leq p_{Lab} \leq 1.5$ GeV/c dans le référentiel du laboratoire. Ils cherchent à déterminer les constantes de couplage de chacun des mésons à chaque vertex par minimisation du χ^2 sur les données d'inélasticité et de déphasage existant sur les ondes S, P et D.

Une autre étude faite par J. W. Alcock, W. N. Cottingham et A. C. Davis [45] prend comme ingrédient de base un modèle d'échanges de mésons identique au précédent pour une énergie telle que $p_{Lab} \leq 1.9$ GeV/c. Les constantes de couplage, coefficients d'inélasticité et déphasages sont déterminés de la même manière que dans [42]. Ce modèle est comparé avec une approche en termes de trajectoires de Regge afin de déterminer l'influence sur les constantes de couplage et les parties réelles des amplitudes partielles de diffusion Kaon-Nucléon. Il se dégage de leurs résultats un accord qualitatif convenable avec les analyses en déphasage [43, 44] excepté pour l'onde D_{15} .

L'idée de considérer les degrés de liberté de quark pour comprendre l'interaction KN est née de résultats obtenus par R. Büttgen et al.[1] dans le cadre d'un modèle d'échange de bosons entre les deux particules. En effet, dans cette étude le groupe de Bonn fut obligé, dans le but d'améliorer l'accord théorie-expérience pour les déphasages en onde s dans le canal d'isospin $I = 0$:

- soit d'augmenter les constantes de couplage ωNN (comme cela avait déjà été fait pour reproduire les déphasages Nucléon-Nucléon) et ωKK respectivement de 30% et 60% par rapport à la valeur obtenue grâce à des arguments basés sur la symétrie SU(3).
- soit de rajouter l'échange d'un méson scalaire fictif répulsif de courte portée.

Cette nécessité d'introduire une partie répulsive dans l'interaction, dont la portée de l'ordre de 0.2 fm est inférieure au rayon du nucléon ($r_N \approx 1$ fm), fût un argument en faveur de la prise en compte de la sous structure en quark du kaon et du nucléon.

1.3.2 Modèles tenant compte des degrés de liberté de quarks

Approches relativistes

Comme approche relativiste de ce problème de diffusion citons le travail de Veit, Thomas et Jennings [48]. En effet, ils tentèrent de reproduire les déphasages Kaon-Nucléon pour les ondes s, p, d dans un modèle de sac nuageux(CBM). Ce modèle traite le nucléon comme un sac de quarks échangeant un octet de mésons et suppose le kaon sans structure. Leur résultat pour l'onde s dans le canal d'isospin $I = 1$ est convenable alors que pour les autres ondes l'accord théorie-expérience n'est plus satisfaisant.

Approches non relativistes

Si l'on s'intéresse aux approches non relativistes, les physiciens se sont principalement attachés à décrire correctement les deux canaux d'isospin de l'onde s concernant la diffusion Kaon-Nucléon. Ce sont des calculs bâtis sur des potentiels interquarks, issus de l'échange d'un gluon entre deux quarks, et qui prennent en compte les principales propriétés de la QCD (liberté asymptotique et confinement).

Ainsi I. Bender et H. G. Dosch [49] choisirent une approche adiabatique du problème. Les paramètres intervenant dans leur potentiel interquark sont ajustés de façon à reproduire à la fois la spectroscopie hadronique et les deux canaux d'isospin intervenant dans l'onde s .

Plusieurs méthodes variationnelles sont mises en oeuvre pour parvenir aux déphasages Kaon-Nucléon.

- La méthode de la coordonnée génératrice est utilisée par I. Bender, H. G. Dosch, H. J. Pirner et H. G. Kruse [50]. Leur calcul repose sur une fonction d'onde d'espace, pour chacun des deux agrégats, développée sur une seule gaussienne (un quantum d'oscillation) et sur une approximation locale des potentiels non locaux issus de ce type de traitement. Tous les paramètres intervenant dans ce modèle sont déterminés à partir de la première excitation radiale du baryon et sur la différence de masse $\Delta-N$.
- La méthode du groupe résonant est utilisée par :
 - R. K. Campbell et D. Robson [51] dans un modèle basé sur un potentiel reproduisant correctement le spectre des mésons et dont les fonctions d'onde d'espace du nucléon et du kaon sont développées jusqu'à deux quanta dans une base d'oscillateur harmonique.
 - P. Bicudo et J. E. Ribeiro [52] dans le cadre du formalisme de la matrice T . Dans ce travail, ils comparent les résultats obtenus avec trois potentiels interquarks différents (Bhaduri et al. [53], Bender et al. [50], Campbell et Robson [51]).
 - B. Silvestre-Brac, J. Leandri et J. Labarsouque [54] dans une étude où ils comparent les résultats obtenus à partir de deux potentiels (R. K. Bhaduri et al. [53] et B. Silvestre-Brac et al. [55]) ajustés respectivement sur le spectre du charmonium et sur le secteur (u, d, s) des mésons. Les fonctions d'ondes d'espace du kaon et du nucléon sont développées sur trois gaussiennes, aucune paramétrisation n'est supposée pour la fonction d'onde relative du système des deux particules en collisions. Celle-ci est laissée complètement libre de prendre la forme imposée par la dynamique du système.

On peut citer également les travaux réalisés par T. Barnes et E. S. Swanson [56] dans l'approximation de Born pour les diagrammes faisant intervenir des quarks. Ils utilisent un potentiel interquark ne contenant qu'un terme hyperfin (qui est dominant par rapport au terme central) et développent leur fonction d'onde d'espace sur une gaussienne. Les différents paramètres de leur modèle sont ajustés sur les longueurs de diffusion KN des deux canaux d'isospin de l'onde s .

Tous les résultats issus de ces modèles bien que qualitativement en accord avec ceux issus d'analyse en déphasage ne parviennent pas à reproduire simultanément les deux canaux d'isospin de l'onde s .

Une étude de B. Silvestre-Brac, J. Leandri et J. Labarsouque [57] tenta d'améliorer ces résultats en incluant dans leur interaction l'échange de mésons (π, σ). Malheureusement, les deux canaux d'isospin de l'onde s n'ont pu être reproduits simultanément là non plus.

Des travaux non relativistes centrés sur l'étude de déphasages Kaon-Nucléon pour des ondes plus élevées, nous pouvons citer celui de D. Mukhopadhyay et H.J. Pirner [58]. Ils utilisent des fonctions d'ondes d'espace, pour chacun des deux agrégats, développées sur une gaussienne et font une approximation locale de sorte qu'il soit possible de donner une

signification physique directe aux noyaux non locaux issus de ce modèle. Les paramètres utilisés sont les mêmes que [50]. Ils obtiennent des résultats corrects pour les déphasages en onde P excepté pour l'onde P_{01} qui n'est pas suffisamment attractive.

Chapitre 2

Formalisme de la diffusion Kaon-Nucléon dans un modèle de quarks constituants

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, à l'heure actuelle aucun modèle ne conduit à une description satisfaisante de l'interaction KN en termes de quarks. Le désaccord entre théorie et résultats expérimentaux pose le problème de la validité des approximations utilisées. Celles-ci peuvent être regroupées en deux catégories : manque d'ingrédients physiques et/ou calculs trop simplistes. Ainsi, il est très important de distinguer les effets dûs à une mauvaise description physique de ceux issus d'une approche basée sur trop d'approximations. C'est la raison pour laquelle nous avons essayé, dans notre contribution à ce sujet, de résoudre les questions d'ordre numérique de la meilleure façon qu'il soit et d'assurer une meilleure consistance entre la dynamique à l'intérieur des deux agrégats et la dynamique entre les deux agrégats. C'est dans ce but que nous avons basé nos calculs sur trois contraintes qui nous semblent primordiales :

1. La même interaction entre quarks est utilisée pour construire les fonctions d'ondes du Kaon et du Nucléon ainsi que pour générer la dynamique du système KN.
2. Cette interaction quark-quark doit donner une bonne description du spectre des mésons et des baryons.
3. La fonction d'onde relative du système KN est laissée complètement libre de prendre la forme imposée par la dynamique du système. Aucune paramétrisation n'a été supposée à priori.

Il faut mentionner que des études, ne prenant pas en compte au moins une de ces conditions, peuvent parvenir à des résultats en meilleur accord avec l'expérience. Cet accord peut nous donner des indications sur les processus physiques en présence mais nous pensons qu'une description cohérente du processus de diffusion doit remplir les trois contraintes que nous nous sommes fixées.

Une bonne cohérence entre l'interaction entre quarks à l'intérieur de chaque agrégat et l'interaction entre quarks d'agrégats différents est, de notre point de vue, un atout essentiel. Il doit être inséré dans toute théorie désireuse de traiter ces questions de diffusion de particules composites de façon satisfaisante. Il serait irréaliste d'utiliser, comme inter-

action entre quarks d'agrégat différents, une expression qui serait incapable d'expliquer correctement les propriétés des agrégats eux-mêmes. Ce point n'a pas toujours été respecté par le passé. En effet, très souvent la fonction d'onde relative du système KN est développée sur une fonction gaussienne pure [50, 58] ou bien, plus contestable d'après nous, certains auteurs n'ont pas vérifié que les paramètres utilisés dans le potentiel interquark, pour décrire l'interaction entre les agrégats, sont aussi capable de décrire convenablement les propriétés internes de chacun des deux agrégats [49, 50, 51, 56, 58].

Dans ce problème de diffusion nous avons à considérer deux types de particules. Le kaon (noté K) représentera aussi bien le méson K^+ ($u\bar{s}$) que le méson K^0 ($d\bar{s}$). Le nucléon (noté N) évoquera soit le neutron(udd) soit le proton(uud). La prise en compte de la sous-structure en quarks de chacune des deux particules, nous confronte à un problème à cinq corps qu'il serait illusoire de vouloir résoudre de façon exacte. La méthode du groupe résonant (RGM) que nous utilisons ici, est très efficace en pratique pour traiter ce genre de problème mais conduit à plusieurs types d'approximations dont l'essentielle est l'approximation concernant chaque agrégat. En effet, leur description n'est pas absolument parfaite car leur structure reste figée pendant tout le processus de diffusion.

Dans la partie qui va suivre nous nous focaliserons sur la description des propriétés internes de chacun des deux projectiles pris séparément. Puis nous établirons, grâce à la fonction d'onde KN construite à partir des fonctions d'ondes du kaon et du nucléon, l'équation fondamentale régissant la diffusion de ces deux particules. Enfin, nous en déduirons les déphasages élastiques KN pour une impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire comprise entre 0 et 1 GeV/c. Nous noterons dans cette étude, 1, 2, 3 les trois quarks ordinaires du nucléon et 4, 5 le quark ordinaire et l'antiquark étrange du kaon.

2.1 Propriétés internes de chaque agrégat

Il est très important, pour parvenir à une description physique correcte de notre problème de diffusion, de se donner une bonne fonction d'onde pour chaque agrégat ainsi qu'un bon potentiel interquark. Evidemment, ces deux points sont intimement liés puisque la fonction d'onde résulte en partie du choix du potentiel.

2.1.1 Potentiels interquarks

L'obtention d'une forme explicite pour le potentiel d'interaction est rendue possible grâce à l'exploitation de résultats bien connus de la QCD. Nous savons qu'à très courte portée, ou bien de façon équivalente à haute énergie, les quarks se comportent indépendamment les uns des autres, ils sont quasi libres. C'est le phénomène de liberté asymptotique illustré par le fait que la constante de couplage quark-gluon $\alpha_s \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Le régime de la QCD est alors très similaire à celui de l'électrodynamique quantique (QED) autorisant ainsi un développement perturbatif de l'interaction. Cette propriété de la QCD à haute énergie nous apprend notamment que les termes dominants de ce développement viennent de l'ordre le plus bas en α_s (ou $g \propto \sqrt{\alpha_s}$) c'est-à-dire correspondant au mécanisme mettant en jeu l'échange d'un gluon entre deux quarks (Fig. 2.1).

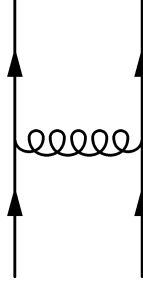


FIG. 2.1 – Mécanisme d'échange d'un gluon entre deux quarks.

L'application de techniques analogues à celles rencontrées en QED, dans ce régime perturbatif de la QCD, nous permet de remonter à un potentiel quark-quark appelé OGE (One Gluon Exchange) dans lequel les degrés de liberté de gluons ont disparu. L'expression de ce potentiel à deux corps (l'échange d'un gluon ne concernant évidemment qu'une paire de quarks) a déjà fait l'objet de calculs par De Rujula [59]. Son expression est donnée par :

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^{OGE}(r) = & \vec{F}_i \cdot \vec{F}_j \alpha_s \\
 & \left\{ \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\frac{1}{2m_i m_j c^2} \left[\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{r} + \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p}_i) \cdot \vec{p}_j}{r^3} \right]}_{\text{Darwin}} - \underbrace{\frac{\pi \hbar^2}{2c^2} \delta(\vec{r}) \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} + \frac{4\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{3m_i m_j} \right)}_{\text{Hyperfin}} \right. \\
 & - \underbrace{\frac{\hbar}{2c^2 r^3} \left[\frac{1}{m_i^2} (\vec{r} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{\sigma}_i - \frac{1}{m_j^2} (\vec{r} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\sigma}_j + \frac{2}{m_i m_j} ((\vec{r} \cdot \vec{p}_i) \cdot \sigma_j - (\vec{r} \cdot \vec{p}_j) \cdot \sigma_i) \right]}_{\text{Spin-orbite}} \\
 & \left. - \underbrace{\frac{\hbar^2}{m_i m_j c^2} \frac{1}{r^3} \left[\frac{3(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \sigma_i \cdot \sigma_j \right]}_{\text{tenseur}} \right\} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

où $\vec{F}_i = \frac{1}{2} \vec{\lambda}_i$ avec $\vec{\lambda}_i$ les 8 matrices de Gell-Mann génératrices du groupe $SU(3)_c$; α_s est la constante de couplage quark-gluon.

Ce potentiel, issu de la QCD, ressemble étonnamment au potentiel électrodynamique de la QED. Cette analogie s'explique par le mécanisme d'interaction entre deux fermions qui provient, dans les deux cas, de l'échange d'un boson vecteur de masse nulle. Cependant, les similitudes s'arrêtent là et des divergences apparaissent dès que l'on regarde plus en profondeur. Deux différences majeures peuvent illustrer cela :

- L'intensité des forces mise en jeu est très différente dans la gamme d'énergies que l'on considère. En effet, à ces échelles d'énergies la valeur de la constante de couplage forte $\frac{\alpha_s(Q^2)}{\hbar c}$ est de quelques unités alors que la valeur de la constante de structure fine (electromagnétique) $\frac{e^2}{\hbar c}$ vaut $\frac{1}{137}$.
- Le gluon possède une charge de couleur (contrairement au photon qui ne possède pas de charge) qui lui permet :

1. de changer la charge de couleur des quarks. Cette propriété se manifeste dans l'équation (2.1) par le terme $\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j$ qui prend des valeurs bien différentes de celles obtenues en QED :

$$\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j = -\frac{4}{3} \quad \text{pour une paire } q\bar{q} \text{ dans un méson}$$

$$\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j = -\frac{2}{3} \quad \text{pour une paire } qq \text{ dans un baryon}$$

De sorte que, contrairement à la QED, où $V_{e^+e^-} = -V_{e^-e^-}$, la QCD impose $V_{q\bar{q}} = 2V_{qq}$.

2. de se coupler à lui même par les diagrammes à 3 et 4 branches (Fig 2.2) suivant :

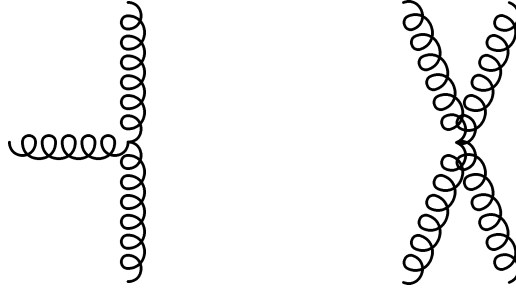


FIG. 2.2 – Auto-couplage de 3 et 4 gluons

Dès que l'on se place à basse énergie, les quarks se mettent à interagir fortement entre eux, interdisant tout développement perturbatif. Cette interaction quark-quark fait alors appel à des mécanismes très compliqués tels que ceux donnés Figure 2.3. Parmi eux on peut distinguer des diagrammes de création de paires quark-antiquark et d'échange croisés de gluons (les deux premiers) qui sont communs à la QED. A ces processus viennent se greffer des diagrammes propres à la QCD, comme les 3 derniers de la Figure 2.3, où les gluons se couplent entre eux.

C'est ce régime non perturbatif qui serait à l'origine du confinement (ou esclavage infra-rouge) des quarks à l'intérieur des hadrons.

Il faut souligner que l'approche non relativiste ou semi-relativiste se justifie d'autant plus que les vitesses rencontrées dans ce système sont négligeables par rapport à la vitesse de la lumière et que les masses des quarks impliquées (appelées masses constituantes en contraste avec les masses "courantes" qui interviennent dans le lagrangien de QCD) dans le processus, sont lourdes.

Nous nous servirons, par la suite, de trois types de potentiels qq ou $q\bar{q}$ phénoménologiques largement inspirés de la QCD (notamment de l'échange d'un gluon entre deux quarks Eq. 2.1) tant pour la partie courte portée (parties coulombienne+hyperfine) que pour le confinement. Ces potentiels seront pris à deux corps malgré l'existence de diagrammes du type de la Figure 2.3 qui génèrent des forces à 3, 4, ..., N corps.

Parmi eux, nous distinguerons ceux :

- ne contenant pas de terme spin-orbite

– contenant un terme spin-orbite

Dans toute la suite nous prendrons $\hbar = c = 1$

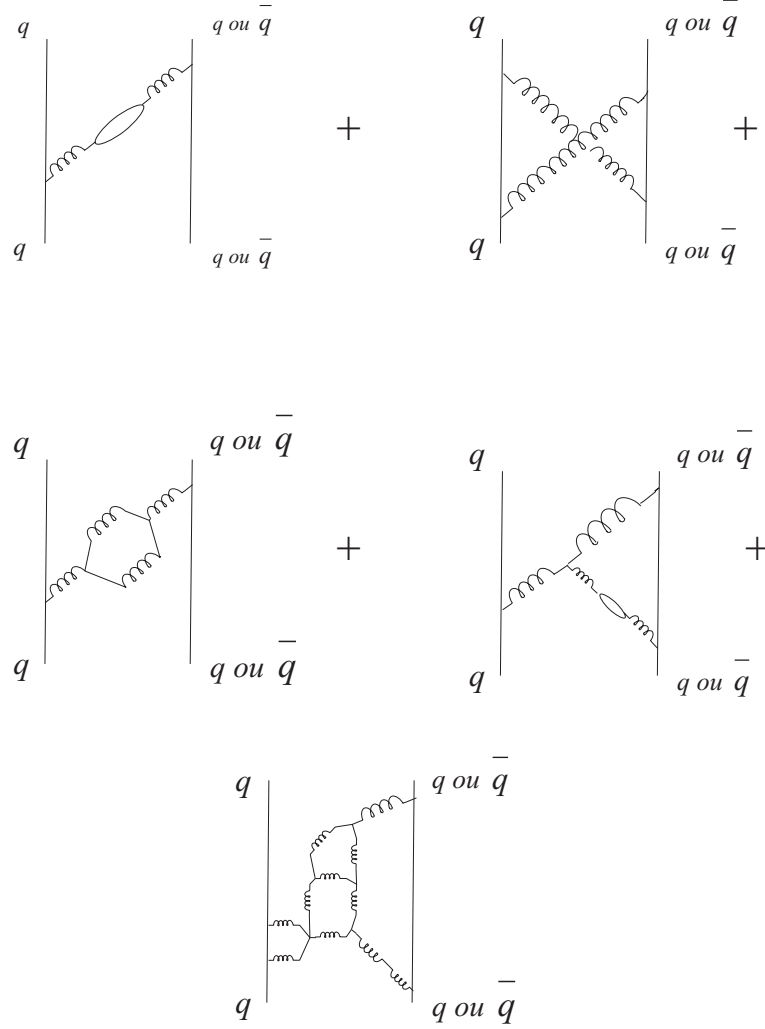


FIG. 2.3 – Mécanisme d'interaction de deux quarks à grande distance.

Potentiel sans terme spin-orbite

La forme générale du potentiel est donnée par :

$$V_{ij}(r) = -\frac{3}{16} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \left[V_{ij}^{(c)}(r) + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j V_{ij}^{(\sigma)}(r) \right] \quad (2.2)$$

$$V_{ij}^c(r) = -\frac{A}{r} + Br - D \quad ; \quad V_{ij}^\sigma(r) = V_{ij} e^{-\frac{r^2}{r_{ij}^2}} \quad (2.3)$$

Dans cette expression, r est la distance entre deux quarks, $\vec{\lambda}$ et $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Gell-Mann et Pauli concernant les degrés de liberté de couleur et de spin. A, B, D, V_{ij}, r_{ij}

sont les paramètres de cette force. Ils ont été calculés par R. Ceuleneer et C. Semay [60] dans le cas d'une cinématique relativiste pour les quarks et par B. Silvestre-Brac et C. Semay [55] dans le cas d'une cinématique non relativiste de façon à reproduire au mieux le spectre des mésons et des baryons.

Potentiel avec terme spin-orbite

Etant donné que les effets dûs à la force spin-orbite sur la spectroscopie hadronique ne sont pas de grande importance, nous avons pris comme point de départ le potentiel AL1 calculé par B. Silvestre-Brac et C. Semay [55]. Nous avons rajouté, aux parties centrales et hyperfines données précédemment, un terme spin-orbite afin de prendre en compte le splitting à la fois dans l'interaction KN et dans la spectroscopie hadronique. Le potentiel ainsi obtenu est alors :

$$V_{ij}(r) = -\frac{3}{16} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \left[V^{(c)}(r) + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j V_{ij}^{(\sigma)}(r) + \vec{l}_{ij} \cdot \vec{s}_{ij} V_{ij}^{(ls)}(r) \right] \quad (2.4)$$

Dans cette expression \vec{l}_{ij} et \vec{s}_{ij} sont les moments angulaires et les spins relatifs des quarks i et j . L'expression prise pour les fonctions $V_{ij}(r)$ est alors :

$$V^c(r) = -\frac{\kappa}{r} + \lambda r - D \quad ; \quad V_{ij}^\sigma(r) = V_{0ij} e^{-\frac{r^2}{r_{0ij}^2}} \quad ; \quad V_{ij}^{ls}(r) = V_{1ij} e^{-\frac{r^2}{r_{1ij}^2}} \quad (2.5)$$

$$V_{0ij} = \frac{2\kappa'}{3\sqrt{\pi}m_i m_j} \quad ; \quad V_{1ij} = \frac{V_2}{m_i m_j} \quad ; \quad r_{0ij} = A(2\mu)^{-B} \quad ; \quad r_{1ij} = A'(2\mu)^{B'} \quad (2.6)$$

Il est important de souligner que la force spin-orbite, donnée ici, diffère de la forme en $\frac{1}{r^3}$ obtenue à partir de l'échange d'un gluon entre deux quarks (Eq. 2.1). Notre expression nous évite en effet d'aboutir à un effondrement de la fonction d'onde exacte des mésons. La forme gaussienne que nous avons choisi de prendre pour cette force spin-orbite est beaucoup plus pratique pour mener les calculs. Nous avons gardé, dans cette interaction, les valeurs originales des paramètres κ , λ , D , m_i , κ' , A , B intervenant dans le potentiel AL1 [55] de sorte que le spectre des mésons et des baryons soit reproduit de façon satisfaisante. Par contre, les paramètres de la force spin-orbite, V_2 , A' , B' sont ajustés sur les masses des différents multiplets de hadrons. Dans l'équation (2.6), $\mu = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ est la masse réduite des quarks i et j .

Commentaires sur l'importance des différents éléments présents dans l'interaction quark-quark

* La partie hyperfine de cette interaction, en $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$, est essentielle pour expliquer à la fois la partie courte portée de l'interaction Nucléon-Nucléon et la spectroscopie hadronique. Cette force hyperfine n'est pas de portée nulle, comme c'est le cas si l'on se réfère exclusivement au potentiel V^{OGE} (du fait de la fonction $\delta(\vec{r})$). Si tel était le cas, les calculs non perturbatifs conduiraient à un effondrement des systèmes physiques. Cette force dépend de la saveur par le biais du terme $\frac{1}{m_i m_j}$, r_{ij} et r_{0ij} . Son influence s'atténue donc lorsque la masse des quarks augmente.

- * La partie confinante est introduite à la main et provient de résultats de QCD sur réseau incluant tous les diagrammes de la figure 2.3. De tels calculs tendent à prouver que l'interaction entre deux quarks séparés d'une distance r croît linéairement en fonction de la distance ($\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) \propto Cr$). De plus, le terme en $\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j$, qui apparaît dans le potentiel V^{OGE} , est également factorisé pour la partie confinante. Il n'existe aucune justification théorique à cela. Ceci conduit à la règle $V_{q\bar{q}} = \frac{1}{2}V_{q\bar{q}}$ qui semble bien vérifiée. Par contre, nous ne savons rien quant à la validité de cet ansatz pour des systèmes plus complexes.
- * La partie centrale du potentiel (c'est-à-dire coulomb+confinement), contrairement à l'interaction spin-spin, est indépendante de saveur.

Il faut souligner qu'à longue portée, le confinement linéaire l'emporte sur la partie hyperfine. L'interaction est alors indépendante de spin.

Par contre, à courte portée, c'est la force hyperfine qui joue un rôle déterminant.

Les valeurs numériques des paramètres, intervenant dans chacune de ces trois forces, seront donnés Chapitre 3 (page 43).

2.1.2 Hamiltoniens et fonctions d'ondes

Dans ce qui suit, nous nous attacherons à décrire les propriétés internes du kaon et du nucléon en termes de leur sous-structure en quarks.

Kaon

Il est pratique d'introduire, pour décrire cette paire quark-antiquark, un système de coordonnées internes au kaon. Un choix classique de coordonnées intrinsèques linéairement indépendantes (appelées coordonnées de Jacobi), est défini de la façon suivante (Fig. 2.4) :

$$\vec{z} = \sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}}(\vec{r}_4 - \vec{r}_5) \quad (2.7)$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{(\vec{r}_4 + \omega\vec{r}_5)}{1+\omega} \quad (2.8)$$

avec $\omega = \frac{m_{\bar{s}}}{m}$ le rapport de la masse du quark étrange sur la masse du quark ordinaire. Les masses des quarks u et d sont identiques ($m_u = m_d = m$), \vec{r}_4 et \vec{r}_5 sont les coordonnées respectives des quarks ordinaire et étrange.

Deux cas se présentent alors, selon que l'on souhaite prendre en compte une cinématique relativiste ou non pour les quarks du méson :

- * Dans l'hypothèse d'une cinématique non relativiste, l'énergie cinétique totale du kaon se présente sous la forme :

$$T = \frac{\vec{p}_4^2}{2m} + \frac{\vec{p}_5^2}{2m_s} \quad (2.9)$$

A partir du lagrangien de ce système $\mathcal{L}(\dot{\vec{r}}_4, \dot{\vec{r}}_5, \vec{r}_4, \vec{r}_5) = T(\dot{\vec{r}}_4, \dot{\vec{r}}_5) - V(\vec{r}_4, \vec{r}_5)$, du principe de Lagrange et des relations (2.7) et (2.8) nous déduisons les variables \vec{p} , $\vec{\mathcal{P}}$ conjuguées

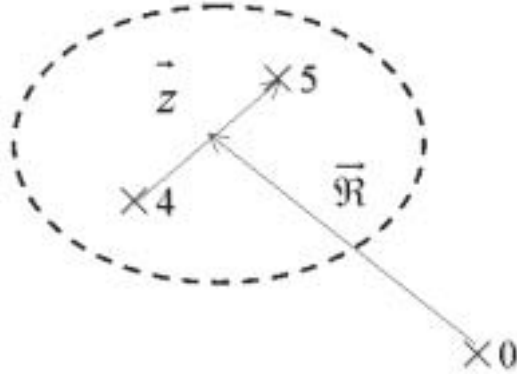


FIG. 2.4 – Coordonnées de Jacobi du kaon

de \vec{z} et $\vec{\mathcal{R}}$:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{z}}} = \frac{\omega \vec{p}_4 - \vec{p}_5}{\sqrt{2\omega(1+\omega)}} \quad (2.10)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{\mathcal{R}}}} = \vec{p}_4 + \vec{p}_5 \quad (2.11)$$

où \vec{p}_4 et \vec{p}_5 sont les variables conjuguées de \vec{r}_4 et \vec{r}_5 .

En termes de ces variables, l'énergie cinétique (2.9) permet un découplage du mouvement du centre de masse du système comme suit :

$$T = \frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2m(1+\omega)} + \frac{\vec{p}^2}{m} \quad (2.12)$$

Dès lors, le hamiltonien intrinsèque au kaon, obtenu en se plaçant dans son référentiel du centre de masse ($\vec{\mathcal{P}} = \vec{0}$), s'écrit :

$$H_K^{int} = \frac{\vec{p}^2}{m} + V(|\vec{r}_4 - \vec{r}_5|) = \frac{\vec{p}^2}{m} + V_{45}\left(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}}z\right) \quad (2.13)$$

avec $V_{45}(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}}z)$ le potentiel interquark Eq.(2.2) ou Eq.(2.4) calculé dans le cadre d'une cinématique non relativiste.

* Si l'on se donne une cinématique relativiste pour les quarks, le hamiltonien du kaon dans son référentiel du centre de masse s'écrit :

$$H_K^{int} = \sqrt{\vec{p}_4^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_5^2 + (\omega m)^2} - m(1+\omega) + V_{45}\left(\left(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}}z\right)\right) \quad (2.14)$$

avec $V_{45}(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}}z)$ le potentiel calculé par R. Ceuleneer et C. Semay [60] dont la forme est donnée Eq.(2.2).

Dans le référentiel du centre de masse du kaon ($\vec{p}_4 + \vec{p}_5 = \vec{0}$), les impulsions des quarks ordinaire et étrange \vec{p}_4 et \vec{p}_5 , intervenant dans H_K^{int} Eq.(2.14), peuvent être exprimées en termes de la variable de Jacobi définie en Eq.(2.10).

De plus, la donnée d'une fonction d'onde d'essai, basée sur des critères de symétrie, va nous permettre de compléter notre vision du kaon. La forme que nous choisissons de prendre (en considérant le kaon au repos) est :

$$\Psi_K(4, 5, \vec{z}) = C(4, 5)\eta(4, 5)\chi(4, 5)f(\vec{z}) \quad (2.15)$$

Avant d'exprimer avec précision chacun des éléments constitutifs de cette fonction d'onde, il est nécessaire de rappeler que la couleur n'est pas directement observable. Ce principe impose donc aux hadrons de se trouver dans un état singulet du groupe $SU(3)$ de couleur. Ce postulat de non observation d'états colorés est à mettre en lien avec le confinement des quarks à l'intérieur des hadrons, empêchant ainsi leur observation comme états isolés. Nous pouvons formuler cette idée de la façon suivante :

Tout état hadronique est un singulet de couleur

Ce postulat apparaît comme une contrainte dynamique destinée à éliminer les états colorés. Son application nous impose de prendre, comme fonction d'onde de couleur $C(4, 5)$ du kaon, la représentation singulet (antisymétrique dans l'échange des quarks) de la décomposition des deux triplets de quarks en représentation irréductible. Elle est définie par :

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (2.16)$$

Dans l'équation (2.15), $\eta(4, 5)$ et $\chi(4, 5)$ sont les fonctions d'ondes d'isospin (I_K) et de spin (S_K). Elles sont déterminées de façon à donner les nombres quantiques du kaon ($I_K = \frac{1}{2}, S_K = 0$). La seule possibilité de coupler l'isospin et le spin du quark et de l'antiquark est :

$$\eta(4, 5) = \left[\frac{1}{2}, 0 \right]_{I_K = \frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

$$\chi(4, 5) = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]_{S_K = 0} \quad (2.18)$$

L'état fondamental du K est tel que le moment angulaire relatif entre les deux quarks est nul ($L_K = 0$). Une fonction qui vérifie cette propriété est donnée par :

$$f(\vec{z}) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(\vec{z}) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(\vec{z}) = e^{-\gamma_i \frac{z^2}{2}} \quad (2.19)$$

où γ_i, c_i sont les $2n$ paramètres variationnels. Ils sont déterminés de façon à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E[\Psi_K] = \frac{\langle \Psi_K | H_K^{int} | \Psi_K \rangle}{\langle \Psi_K | \Psi_K \rangle} \quad (2.20)$$

Les coefficients c_i sont normalisés de sorte que $\langle \Psi_K | \Psi_K \rangle = 1$.

Il faut noter que le terme constant, D , intervenant dans l'interaction interquark Eq.(2.2)

ou Eq.(2.4) participe à la masse du kaon en tant que constante et n'a pas à être inclu dans le processus de minimisation.

La formule donnant la masse du kaon est alors donnée par :

$$M_K(b_i, \gamma_i) = m(1 + \omega) + \frac{\langle \Psi_K | H_K^{int} | \Psi_K \rangle}{\langle \Psi_K | \Psi_K \rangle} \quad (2.21)$$

avec H_K^{int} le hamiltonien total du kaon Eq.(2.13) ou Eq.(2.14)(différent suivant la cinématique considérée).

Il est important de souligner que l'on a simplement l'égalité suivante sur la valeur moyenne de H_K^{int} :

$$\langle \Psi_K | H_K^{int} | \Psi_K \rangle = \epsilon_K \quad (2.22)$$

où ϵ_K est l'énergie interne du kaon obtenue à partir de la minimisation de (2.20).

Ainsi, $|\Psi_K\rangle$ n'est pas en général état propre de H_K^{int} ,

$$H_K^{int} |\Psi_K\rangle \neq \epsilon_K |\Psi_K\rangle \quad (2.23)$$

mais s'en rapproche lorsque le nombre n de gaussiennes pris en compte pour décrire la fonction d'onde d'espace du kaon augmente ; la fonction d'onde $|\Psi_K\rangle$ engendre alors tout l'espace de Hilbert disponible et tend ainsi vers la fonction d'onde exacte du système à deux particules.

Nucléon

Nous définissons également un système de coordonnées internes (coordonnées de Jacobi, Fig. 2.5) du nucléon :

$$\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.24)$$

$$\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2.25)$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} \quad (2.26)$$

avec \vec{r}_1 , \vec{r}_2 et \vec{r}_3 les coordonnées des trois quarks du nucléon.

Comme pour le kaon, deux cas se présentent suivant la cinématique considérée :

* Une cinématique non relativiste, pour les quarks du nucléon, impose à l'énergie cinétique totale de s'écrire :

$$T = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m} \quad (2.27)$$

où \vec{p}_1 , \vec{p}_2 , \vec{p}_3 sont les impulsions conjuguées des coordonnées \vec{r}_1 , \vec{r}_2 et \vec{r}_3 .

Le principe de Lagrange nous donne les variables conjuguées de ces coordonnées de Jacobi \vec{x} , \vec{y} , $\vec{\mathcal{R}}$:

$$\vec{p} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} \quad (2.28)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) \quad (2.29)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad (2.30)$$

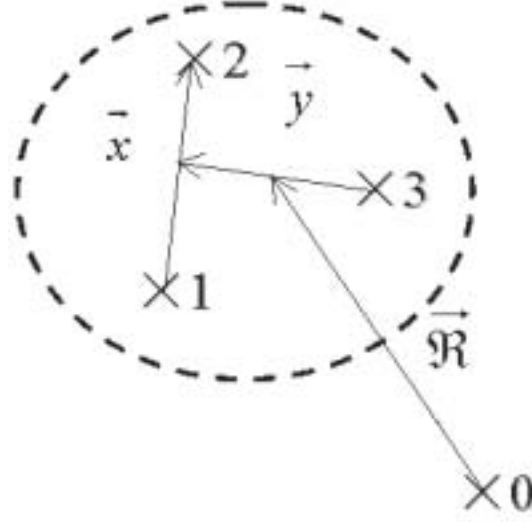


FIG. 2.5 – Coordonnées de Jacobi du nucléon

Comme pour le kaon, les coordonnées que nous avons choisies permet un découplage du mouvement du centre de masse du nucléon. L'énergie cinétique issue de (2.27) se transforme en :

$$T = \frac{\vec{P}^2}{6m} + \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{q}^2}{m} \quad (2.31)$$

Si l'on se place dans le référentiel du centre de masse du nucléon ($\vec{P} = \vec{0}$), nous trouvons alors comme hamiltonien intrinsèque :

$$H_N^{int} = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{q}^2}{m} + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|) \quad (2.32)$$

avec $V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ représentant, comme pour le kaon, le potentiel d'interaction entre deux quarks que l'on a défini précédemment par les expressions Eq.(2.2) ou Eq.(2.4).

* Une cinématique relativiste nous donne pour le hamiltonien du nucléon :

$$H_N^{int} = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2} - 3m + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|) \quad (2.33)$$

avec $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ le potentiel de R. Ceuleneer et C. Semay [60] donné précédemment Eq.(2.2).

Dans le référentiel du centre de masse du nucléon ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}$), les impulsions des quarks ordinaires \vec{p}_1 , \vec{p}_2 et \vec{p}_3 , qui apparaissent dans H_N^{int} Eq.(2.33), peuvent être exprimées en termes des variables conjuguées des coordonnées de Jacobi \vec{p} et \vec{q} par le changement de variable Eq(2.28), Eq(2.29).

La fonction d'onde d'essai que l'on prend pour le nucléon est alors de la forme :

$$\Psi_N(1, 2, 3, \vec{x}, \vec{y}) = C(1, 2, 3)[\eta(1, 2, 3)\chi(1, 2, 3)]f(\vec{x}, \vec{y}) \quad (2.34)$$

Si nous considérons le nucléon formé de trois quarks et si l'on se réfère au postulat relatif à l'aspect non coloré des hadrons, il n'existe qu'une seule possibilité de former un singlet de couleur pour le nucléon $C(1, 2, 3)$ à partir de la décomposition en représentation irréductible des trois triplets de couleur. Elle est donnée par :

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (2.35)$$

Pour la fonction d'onde d'isospin $\eta(1, 2, 3)$, il existe deux possibilités de coupler trois quarks pour former un hadron d'isospin $I_N = \frac{1}{2}$, soit :

$$\eta_0(1, 2, 3) = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)_0, \frac{1}{2} \right]_{I_N = \frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

$$\eta_1(1, 2, 3) = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)_1, \frac{1}{2} \right]_{I_N = \frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

Pour la fonction d'onde de spin $\chi(1, 2, 3)$, les deux mêmes possibilités sont envisageables :

$$\chi_0(1, 2, 3) = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)_0, \frac{1}{2} \right]_{S_N = \frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

$$\chi_1(1, 2, 3) = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)_1, \frac{1}{2} \right]_{S_N = \frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

où $\eta_0(1, 2, 3)$, $\chi_0(1, 2, 3)$ and $\eta_1(1, 2, 3)$, $\chi_1(1, 2, 3)$ sont les fonctions d'ondes d'isospin et de spin respectivement antisymétriques et symétriques dans l'échange des quarks 1 et 2. On peut ainsi former une fonction d'onde spin-isospin complètement symétrique dans l'échange des particules. Il s'agit de la fonction :

$$[\eta(1, 2, 3)\chi(1, 2, 3)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_0(1, 2, 3)\chi_0(1, 2, 3) + \eta_1(1, 2, 3)\chi_1(1, 2, 3)] \quad (2.40)$$

Par conséquent l'ensemble couleur-spin-isospin est complètement antisymétrique et le caractère antisymétrique de la fonction d'onde totale du nucléon nous pousse à prendre une fonction d'onde d'espace symétrique dans l'échange des trois quarks. De plus, l'état fondamental du nucléon est défini par un moment angulaire orbital total nul ($L_N = 0$). Il ressort, de ces considérations de symétries que la fonction $f(\vec{x}, \vec{y})$ peut-être développée sur une base gaussienne :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(\vec{x}, \vec{y}) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(\vec{x}, \vec{y}) = e^{-\alpha_i \frac{\vec{x}^2 + \vec{y}^2}{2}} \quad (2.41)$$

où α_i , a_i sont les paramètres variationnels. Les coefficients a_i sont normalisés de sorte que $\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle = 1$.

En toute rigueur, il est possible de former une fonction d'onde de spin-isospin de symétrie mixte de sorte qu'il suffise de prendre une fonction d'onde d'espace de symétrie mixte également pour obtenir une fonction d'onde totale du nucléon complètement antisymétrique.

Cependant, des calculs de type Fadeev montrent que ce genre de composantes contribuent très peu pour l'état fondamental du nucléon.

La formule donnant la masse du nucléon est alors donnée par :

$$M_N(c_i, \alpha_i) = 3m + \frac{\langle \Psi_N | H_N^{int} | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle} \quad (2.42)$$

avec H_N^{int} le hamiltonien interne total du nucléon Eq.(2.32) ou Eq.(2.33).

Des simplifications ont été introduites de façon à réduire l'espace des états disponibles aux fonctions d'onde $|\Psi_N\rangle$ et $|\Psi_K\rangle$ du nucléon et du kaon. Il faut notamment garder à l'esprit que :

1. nous tronquons l'espace de Hilbert dans lequel nous résolvons notre problème. En effet, nous supposons le nucléon formé de trois quarks alors qu'en principe un baryon est un système de nombre baryonique $B = 1$ autorisant ainsi une structure en quarks beaucoup plus compliquée :

$$\text{Nucléon} = q^3 + q^4 \bar{q} + q^5 \bar{q}^2 + \dots \quad (2.43)$$

De même, nous supposons le kaon formé d'une paire quark-antiquark en négligeant de ce fait les termes plus complexes suivants :

$$\text{Kaon} = q\bar{q} + q^2 \bar{q}^2 + q^3 \bar{q}^3 + \dots \quad (2.44)$$

Une partie de ces contributions est prise en compte phénoménologiquement par la renormalisation de la masse dans les potentiels d'interaction donnés précédemment Eq.(2.2) et Eq.(2.4).

2. la fonction d'onde exacte du nucléon contient, en toute rigueur, des états de symétrie mixte pour les parties spin-isospin et espace.
3. l'espace de Hilbert, des fonctions d'onde d'espace symétriques du N n'est pas complètement généré. En effet, pour le nucléon nous ne considérons que des états de moment angulaire nul pour les paires \vec{x} et \vec{y} . Nous négligeons ainsi les états correctement symétrisés du type $[l_x = 1, l_y = 1]_0$, $[l_x = 2, l_y = 2]_0$, ... De plus, même dans l'état $[l_x = 0, l_y = 0]_0$ la totalité de l'espace n'est pas engendré pour les deux particules. Cependant, ce dernier point est amélioré lorsque le nombre n de gaussiennes prises pour décrire la fonction d'onde d'espace $f(\vec{x}, \vec{y})$ du nucléon et du kaon augmente (des calculs ont montré [54, 57] que 3 gaussiennes suffisaient pour épuiser presque complètement cet espace).

Une conséquence de ces approximations est que $|\Psi_N\rangle$ n'est pas état propre de H_N^{int}

$$H_N^{int} |\Psi_N\rangle \neq \epsilon_N |\Psi_N\rangle \quad (2.45)$$

où ϵ_N est l'énergie interne du nucléon obtenue à partir du même principe variationnel que pour le kaon.

Seule l'égalité suivante sur les valeurs moyennes est réalisée :

$$\langle \Psi_N | H_N^{int} | \Psi_N \rangle = \epsilon_N \quad (2.46)$$

Nous allons utiliser, dans la partie suivante, les résultats obtenus sur le K et le N pour décrire les propriétés du système KN.

2.2 Système Kaon-Nucléon

Comme pour le kaon et le nucléon nous définissons un système de coordonnées naturel (coordonnées de Jacobi, Fig. 2.6) pour décrire les 5 quarks de notre problème de diffusion. Il est défini par :

$$\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.47)$$

$$\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2.48)$$

$$\vec{z} = \sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}}(\vec{r}_4 - \vec{r}_5) \quad (2.49)$$

$$\vec{R} = \sqrt{\frac{2}{3(1+\omega)(4+\omega)}} \left[(1+\omega)(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) - 3(\vec{r}_4 + \omega\vec{r}_5) \right] \quad (2.50)$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \omega\vec{r}_5}{4+\omega} \quad (2.51)$$

avec $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ et \vec{r}_5 respectivement les coordonnées des quatre quarks ordinaires et de l'antiquark du système KN.

En plus des coordonnées \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} , déjà utilisées pour décrire chacun des deux clusters, nous avons besoin d'introduire la coordonnée \vec{R} correspondant à la coordonnée relative entre le kaon et le nucléon ainsi que la coordonnée $\vec{\mathcal{R}}$ du centre de masse du système KN.

L'un de nos objectifs étant d'étudier l'influence de la cinématique sur les déphasages

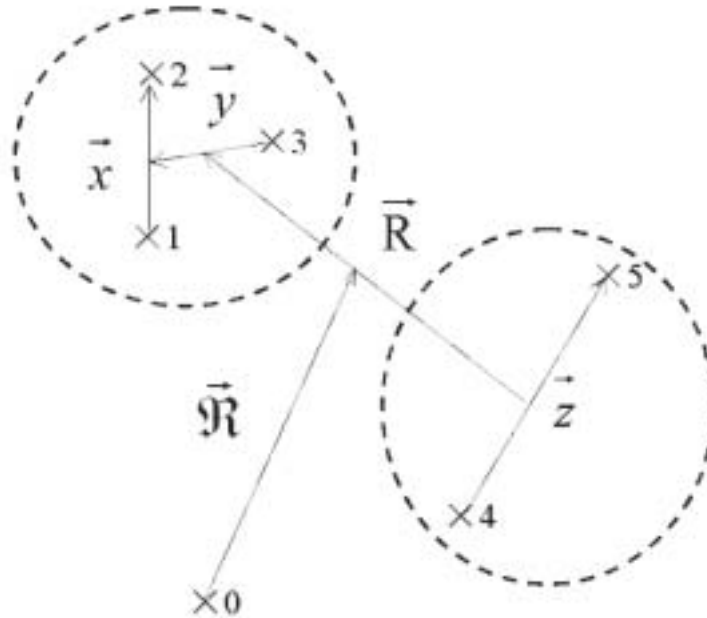


FIG. 2.6 – Coordonnées de Jacobi du système kaon-nucléon

élastiques KN, deux cas seront envisagés :

* Pour une cinématique non relativiste, l'énergie cinétique totale s'écrit sous la forme symétrique :

$$T = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m} + \frac{\vec{p}_5^2}{2\omega m} \quad (2.52)$$

Les impulsions conjuguées des variables de Jacobi sont données par :

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad (2.53)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) \quad (2.54)$$

$$\vec{u} = \sqrt{\frac{1}{(1+\omega)2\omega}}(\omega\vec{p}_4 - \vec{p}_5) \quad (2.55)$$

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{1}{6(1+\omega)(4+\omega)}} \left[(1+\omega)(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) - 3(\omega\vec{p}_4 + \vec{p}_5) \right] \quad (2.56)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \omega\vec{p}_4 + \vec{p}_5 \quad (2.57)$$

avec $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ et \vec{p}_5 les impulsions de chacun des quarks du système.

Nous obtenons ainsi, en termes de ces impulsions de Jacobi, pour l'énergie cinétique totale (2.52) en se plaçant dans le référentiel du centre de masse ($\vec{\mathcal{P}} = \vec{0}$) :

$$T = \frac{\vec{P}^2}{m} + \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{q}^2}{m} + \frac{\vec{u}^2}{m} \quad (2.58)$$

Le hamiltonien total s'écrit donc :

$$\begin{aligned} H_{KN} = & T + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|) + \\ & V_{14}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|) + V_{15}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_5|) + V_{24}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|) + \\ & V_{25}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_5|) + V_{34}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) + V_{35}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_5|) + V_{45}(|\vec{r}_4 - \vec{r}_5|) \end{aligned} \quad (2.59)$$

La décomposition naturelle de notre système de cinq quarks en deux agrégats ressort clairement de l'Eq.(2.59). En effet :

$$H_{KN} = H_K^{int} + H_N^{int} + V + \frac{\vec{P}^2}{m} \quad (2.60)$$

avec :

$H_K^{int} = \frac{\vec{u}^2}{m} + V_{45}(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}}z)$, le hamiltonien intrinsèque au kaon

$H_N^{int} = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{q}^2}{m} + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|)$, le hamiltonien intrinsèque au nucléon

$V = V_{14}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|) + V_{15}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_5|) + V_{24}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|) + V_{25}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_5|) + V_{34}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) + V_{35}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_5|)$, l'énergie potentielle d'interaction entre les quarks du kaon et ceux du nucléon.

* Dans le cas d'une cinématique relativiste pour les quarks, il suffit de remplacer l'énergie cinétique totale T du hamiltonien total donné Eq.(2.59) par :

$$T = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_4^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_5^2 + (\omega m)^2} - \mathcal{M} \quad (2.61)$$

avec $\mathcal{M} = m(4 + \omega)$ la somme des masses des cinq quarks.

Pour résoudre ce problème à cinq corps nous allons utiliser une méthode variationnelle connue sous le nom de méthode du groupe résonant (RGM). Il s'agit d'une méthode caractérisée par une fonction d'onde totale du système KN dans laquelle nous figurons le système (123) dans le nucléon et le système (45) dans le méson K.

La fonction d'onde d'essai que l'on utilise pour décrire ce système dans son référentiel du centre de masse ($\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$), s'écrit alors :

$$\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}) = \mathcal{A} \left[\Phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}) \right] \quad (2.62)$$

$$\Phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}) = \left\{ [\Psi_N(1, 2, 3, \vec{x}, \vec{y}) \Psi_K(4, 5, \vec{z})]^{C, S=\frac{1}{2}, I=0,1} \times \frac{h(R)}{R} \mathcal{Y}_L(\hat{R}) \right\}_{J,M} \quad (2.63)$$

avec \mathcal{A} l'antisymétriseur sous le groupe S_4 des permutations des 4 quarks ordinaires. Cet opérateur est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4!} \sum_{\mathcal{P} \in S_4} (-1)^{\mathcal{P}} \mathcal{P} \quad (2.64)$$

où \mathcal{P} est l'opérateur de permutation du groupe S_4 .

La fonction d'onde, $\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R})$, doit être prise dans un état singulet de couleur.

Nous trouvons, à partir du couplage du spin de chacun des deux amas, un spin total :

$$S = S_N \otimes S_K = \frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2} \quad (2.65)$$

Le couplage des deux isodoublets, kaon et nucléon, nous donne deux valeurs possibles pour l'isospin total du système KN :

$$I = I_N \otimes I_K = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } 1 \quad (2.66)$$

Le moment cinétique total J est tel que :

$$J = L_T \otimes S = L_T \otimes \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

avec L_T le moment cinétique orbital total du système KN obtenu à partir des états fondamentaux du kaon ($L_K = 0$), du nucléon ($L_N = 0$) et du moment angulaire relatif des deux particules (L).

$$L_T = L_K \otimes L_N \otimes L = 0 \otimes 0 \otimes L \quad (2.68)$$

La méthode du groupe résonnant, que nous utilisons ici, est essentiellement basée sur une fonction d'onde d'essai dans laquelle les fonctions d'onde intrinsèques du kaon et du nucléon, $\Psi_K(4, 5, \vec{z})$ et $\Psi_N(1, 2, 3, \vec{x}, \vec{y})$, sont données une fois pour toute et sont gelées dans leur état fondamental (aucune polarisation des agrégats n'est prise en compte lors du processus de diffusion). Tout l'effort variationnel est alors concentré sur la fonction d'onde relative $h(R)$ des deux particules en collision. Cette fonction d'onde peut être développée sur une base discrète :

- Oscillateur harmonique
- Gaussiennes piquées ...

Un projet plus ambitieux, destiné à réduire l'incertitude sur $h(R)$, consiste à chercher directement la meilleure fonction d'onde dans l'espace des fonctions de R . Pour cela, il suffit d'utiliser une base continue de sorte que la fonction d'onde relative puisse prendre librement la forme imposée par la dynamique du système. L'absence de forme pré-établie, pour cette fonction d'onde, rend les calculs beaucoup plus complexes essentiellement à cause du traitement du principe d'exclusion de Pauli.

L'objectif de la méthode du groupe résonnant est de trouver la meilleure amplitude pour la fonction d'onde $h(R)$ (développée sur cette base continue) à partir d'une fonction d'onde d'essai du système KN qui s'écrit dans le référentiel du centre de masse :

$$\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}) = \int dr h(r) \mathcal{A} \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r) \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r) = & \left\{ [\Psi_N(1, 2, 3, \vec{x}, \vec{y}) \Psi_K(4, 5, \vec{z})]^{C, S=\frac{1}{2}, I=0,1} \right. \\ & \left. \times \frac{\delta(R-r)}{r} \mathcal{Y}_L(\hat{R}) \right\}_{J, M} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dans ces formules, \vec{R} est la variable dynamique du système au même titre que les autres variables de Jacobi \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} ; r est un paramètre qui caractérise chaque état de la base continue.

2.3 Equation de la diffusion

L'introduction de cette fonction d'onde d'essai, dans l'équation de Schrödinger suivante, va nous permettre d'établir l'équation fondamentale régissant la diffusion de ces deux particules.

$$H_{KN} |\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5)\rangle = E |\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5)\rangle \quad (2.71)$$

où E est l'énergie interne totale du système KN ; $|\Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5)\rangle$ est telle que :

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R} | \Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5) \rangle &= \int dr h(r) \mathcal{A} \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \\ &= \Psi_{NK}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R})\end{aligned}\quad (2.72)$$

En utilisant le fait que :

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle = \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r) \quad (2.73)$$

et en s'aidant de (2.69) et (2.70) nous obtenons :

$$\int dr h(r) H_{KN} \mathcal{A} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle = E \int dr h(r) \mathcal{A} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.74)$$

En projetant cette équation sur l'état $\langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \mathcal{A}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int dr h(r) \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \mathcal{A}^\dagger H_{KN} \mathcal{A} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle = \\ E \int dr h(r) \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \mathcal{A}^2 | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle\end{aligned}\quad (2.75)$$

Les propriétés suivantes de l'antisymétriseur \mathcal{A} et du hamiltonien total H_{KN} :

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \quad ; \quad \mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A} \quad ; \quad \mathcal{A} H_{KN} = H_{KN} \mathcal{A} \quad (2.76)$$

appliquées à l'Eq.(2.75) nous conduisent à une équation de type Hill-Wheeler pour la fonction d'onde relative $h(r)$:

$$\int dr [\mathcal{H}(r', r, J, L; I) - E \mathcal{N}(r', r, J, L; I)] h(r) = 0 \quad \forall r' \quad (2.77)$$

avec

$$\mathcal{H}(r', r, J, L; I) = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \mathcal{A} H_{KN} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.78)$$

$$\mathcal{N}(r', r, J, L; I) = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \mathcal{A} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.79)$$

L'application de l'antisymétriseur défini Eq.(2.64) sur la fonction d'onde ψ_{NK} Eq.(2.69) nous permet de réduire l'expression de cet opérateur à la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}(1 - 3P_{34}) \quad (2.80)$$

avec P_{34} l'opérateur de permutation des quarks 3 et 4.

L'équation (2.77) de Hill-Wheeler devient alors :

$$\begin{aligned}\int dr \{ [\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(d)} - 3\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(e)}] - \\ E [\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(d)} - 3\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(e)}] \} h(r) = 0 \quad \forall r'\end{aligned}\quad (2.81)$$

avec

$$\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | H_{KN} P_{34} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.82)$$

$$\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | P_{34} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.83)$$

$$\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(d)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | H_{KN} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.84)$$

$$\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(d)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.85)$$

où $\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(d)}$, $\mathcal{H}(r', r, J, L; I)^{(e)}$ sont respectivement les noyaux d'énergie cinétique direct et d'échange ; $\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(d)}$, $\mathcal{N}(r', r, J, L; I)^{(e)}$ sont respectivement les normes directe et d'échange.

L'expression de ces noyaux, obtenue à partir du hamiltonien (2.59) et de la fonction d'onde du système KN Eq.(2.69), est donnée dans l'annexe A. En particulier, nous limiterons notre étude, dans l'hypothèse d'une cinématique relativiste, à un état de moment angulaire nul ($L = 0$) pour la fonction d'onde relative. Le calcul d'un des noyaux d'énergie cinétique relativiste d'échange sera développé dans l'annexe B. Nous étendrons ensuite nos investigations à des états de moments angulaires plus élevés dans le cadre d'une cinématique non relativiste. Nous détaillerons notamment l'exemple du calcul des parties centrales et hyperfines (telles qu'elles interviennent Eq.(2.2) et Eq.(2.4)) d'un noyau d'énergie potentielle d'échange, pour un état de moment angulaire relatif L quelconque, dans l'annexe C. Le calcul d'un des noyaux d'échange pour le terme spin-orbite (présent dans l'interaction Eq.(2.4)) sera développé dans l'annexe D.

L'insertion de ces noyaux, dans l'Eq.(2.81), donne une équation intégrale-différentielle satisfaite par la fonction d'onde intercluster $h(r)$ dont la forme diffère suivant la cinématique que l'on utilise pour les quarks.

* Dans l'hypothèse d'une cinématique relativiste, l'équation gouvernant la diffusion des deux particules dans un état s est :

$$\left(\sqrt{\vec{P}^2 + M_N^2} + \sqrt{\vec{P}^2 + M_K^2} - m(4 + \omega) - E \right) \frac{h(r)}{r} + \int_0^\infty dr' [\chi_{NL}(E, r, r', J, L; I)] \frac{h(r')}{r'} = 0 \quad (2.86)$$

où

$$\chi_{NL}(E, r, r', J, L; I) = 3E\mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(e)} - 3(\mathcal{H}_{int}(r, r', J, L; I)^{(e)} + \mathcal{V}(r, r', J, L; I)^{(e)})$$

Dans cette équation de Salpeter, \vec{P} est l'opérateur impulsion relative des deux particules ; χ_{NL} est le noyau non local contenant les termes d'échange propres à l'énergie et au recouvrement des fonctions d'ondes.

Comme cela avait déjà été proposé pour la diffusion pion-pion [60], nous introduisons artificiellement, dans la partie directe de l'Eq.(2.86) via les termes $\sqrt{\vec{P}^2 + M_N^2}$ et $\sqrt{\vec{P}^2 + M_K^2}$, l'énergie relative des deux clusters au lieu de l'énergie cinétique de leurs constituants.

Les noyaux, présents dans χ_{NL} , proviennent de (2.82), (2.83) et sont tels que :

$$\mathcal{Q}(r', r, J, L; I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | Q P_{34} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (2.87)$$

avec $Q = 1$ pour $\mathcal{N}^{(e)}$, $Q = H_K^{int} + H_N^{int}$ issus de Eq.(2.14) et Eq.(2.33) pour $\mathcal{H}_{int}^{(e)}$ et $Q = V = V_{34} + V_{35} + 2V_{24} + 2V_{25}$ pour $\mathcal{V}^{(e)}$ avec un potentiel V_{ij} donné Eq.(2.2). Nous avons utilisé dans l'expression de Q précédente les égalités $V_{14} = V_{24}$ et $V_{15} = V_{25}$ que l'on peut facilement démontrer à partir des propriétés de symétrie de $|\phi(1, 2, 3, 4, 5, r)\rangle$.

La formulation est similaire à [54] et l'expression de chacun des noyaux est donnée dans l'annexe A. Il faut noter que les noyaux d'énergie potentielle sont calculés à partir du potentiel Eq.(2.2) et sont obtenus en posant $L = 0$ dans les noyaux calculés dans l'annexe A. Enfin, le calcul d'un noyau d'énergie cinétique d'échange est fait dans l'annexe B.

* Nous trouvons, pour une cinématique non relativiste, que chaque fonction d'onde radiale $h(r)$ satisfait l'équation de Hill-Wheeler suivante pour un état de moment angulaire relatif $L \geq 0$:

$$\frac{d^2 h(r)}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} h(r) + k^2 h(r) + \int_0^\infty dr' [\chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I)] \frac{h(r')}{r'} = 0 \quad (2.88)$$

où

$$k = \sqrt{\frac{m\tilde{E}}{\hbar^2}}$$

$\tilde{E} = E - \epsilon_N - \epsilon_K$ est l'énergie relative des deux particules dans le référentiel du centre de masse ; ϵ_K et ϵ_N sont les énergies internes de chaque cluster définies Eq.(2.22) et Eq.(2.46). Comme précédemment le noyau non local χ_{NL} peut s'exprimer à l'aide des noyaux d'échange :

$$\chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I) = -3k^2 \mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(e)} + \frac{3m}{\hbar^2} (\mathcal{K}_R(r, r', J, L; I)^{(e)} + \mathcal{V}(r, r', J, L; I)^{(e)})$$

La définition de ces noyaux est identique au cas relativiste excepté que $Q = \frac{p^2}{m}$ pour $\mathcal{K}_R^{(e)}$. Il faut noter que l'équation de diffusion (2.88) a nécessité de faire les approximations suivantes :

$$H_N^{int} |\Psi_N\rangle = \epsilon_N |\Psi_N\rangle \quad (2.89)$$

$$H_K^{int} |\Psi_K\rangle = \epsilon_K |\Psi_K\rangle \quad (2.90)$$

Elles sont d'autant meilleures que le nombre de gaussiennes, prises en compte pour décrire les fonctions d'onde de chaque cluster, est grand. Il faut noter l'absence de terme spin-orbite dans la voie directe de l'Eq.(2.88). C'est une conséquence due à la fois à l'aspect non coloré de chaque cluster et à la forme gaussienne que nous avons prise pour développer nos fonctions d'ondes d'espace.

L'expression obtenue pour chacun des noyaux de χ_{NL} est donnée dans l'annexe A pour les deux formes de potentiel (2.2) et (2.4). Le calcul explicite du terme spin-orbite d'échange intervenant dans le potentiel (2.4) est mené dans l'annexe D.

2.4 Déphasages

Les solutions de ces deux équations de diffusion (2.86) et (2.88), vont nous permettre d'extraire les déphasages élastiques KN pour les deux types de cinématiques que nous avons considérées.

* Pour une cinématique relativiste si nous transformons l'équation de Salpeter (2.86) en une équation de type Schrödinger et que nous faisons tendre vers l'infini la distance entre les deux agrégats, (en remarquant que $\lim_{r', r \rightarrow \infty} \chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I) = 0$) alors nous obtenons une équation de la forme :

$$\frac{d^2 h(r)}{dr^2} + \tilde{k}^2 h(r) = 0 \quad (2.91)$$

avec

$$\tilde{k} = \sqrt{-\frac{M_K^2}{2} - \frac{M_N^2}{2} + \frac{(E + M_N + M_K)^2}{4} + \frac{(M_N^2 - M_K^2)^2}{4(E + M_N + M_K)^2}}$$

La solution de (2.91) est donnée par :

$$h(r) \sim \sin(\tilde{k}r + \delta(\tilde{k})) \quad (2.92)$$

Pour s'affranchir de la constante de normalisation de $h(r)$ Eq.(2.92) nous prenons la dérivée logarithmique :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\frac{dh(r)}{dr}}{h(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{\tilde{k}r}{\tan(\tilde{k}r + \delta(\tilde{k}))} \right] \quad (2.93)$$

Nous en déduisons le déphasage élastique KN pour un état s :

$$\delta(\tilde{k}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(-\tilde{k}r + \arctan \left(\frac{\tilde{k}h(r)}{\frac{dh(r)}{dr}} \right) \right) \quad (2.94)$$

* Pour une cinématique non relativiste, la limite infinie de l'équation de Hill-Wheeler (2.88) et la propriété $\lim_{r', r \rightarrow \infty} \chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I) = 0$ donnent :

$$\frac{d^2 h(r)}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + k^2 h(r) = 0 \quad (2.95)$$

Une solution de cette équation est donnée par :

$$h(r) \sim j_L(kr) - \tan(\delta_{J,L}^I(k)) n_L(kr) \quad (2.96)$$

où $j_L(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques et $n_L(kr)$ sont les fonctions de Neumann sphériques.

Si nous utilisons la continuité de la valeur de la dérivée logarithmique de la solution de l'équation (2.88), $\gamma_l(k) = R_l^{-1} \left(\frac{dR_l}{dr} \right)$ avec $R_l = \frac{h(r)}{r}$ en $r = r_c$, alors nous trouvons :

$$\gamma_L(k) = \frac{\left(\frac{dj_L(kr)}{dr} \right) \Big|_{r=r_c} - \tan(\delta_{J,L}^I(k)) \left(\frac{dn_L(kr)}{dr} \right) \Big|_{r=r_c}}{j_L(kr_c) - \tan(\delta_{J,L}^I(k)) n_L(kr_c)} \quad (2.97)$$

La valeur de r_c est choisie de sorte que l'on puisse diviser le domaine de définition de r en une région interne ($r < r_c$) et une région externe ($r > r_c$) où le potentiel non local

s'annule.

Le déphasage élastique KN pour une onde L quelconque dans le cadre d'une cinématique non relativiste s'exprime alors comme :

$$\delta_{J,L}^I(k) = \arctan \left(\frac{k \frac{dj_L(kr)}{dr} - \gamma_L(k) j_L(kr)}{k \frac{dn_L(kr)}{dr} - \gamma_L(k) n_L(kr)} \right) \Bigg|_{r=r_c} \quad (2.98)$$

Chapitre 3

Influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN

Grâce à la méthode du groupe résonant décrite précédemment nous allons déterminer l'influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN dans un modèle de quarks constituants pour les deux canaux d'isospin $I = 0$ et $I = 1$. Le calcul sera fait explicitement pour l'onde S et des conclusions seront tirées pour les ondes de moment angulaire relatif plus élevé. L'étape préliminaire à ces calculs de déphasage sera de déterminer les paramètres intervenant dans les fonctions d'onde du nucléon et du kaon par minimisation de l'énergie de leur état fondamental pour les deux types de cinématique considérés.

3.1 Potentiel interquark, paramètres des fonctions d'onde et masses

TAB. 3.1 – Paramètres de la force interquark dans le cas où la cinématique prise pour les quarks est relativiste (R) ou bien non relativiste (NR) avec $i=(uu)$, (dd) , (ud) et $j=(u\bar{s}), (d\bar{s})$

	A	B GeV^2	D GeV	V_i GeV	V_j GeV	r_i GeV^{-1}	r_j GeV^{-1}	m GeV	ω
R	0.752	0.184	0.455	0.280	0.189	3.070	2.542	0.171	2.596
NR	0.583	0.169	0.827	0.705	0.456	2.113	2.001	0.324	1.820

Dans nos calculs, les différents paramètres présents dans l'interaction quark-quark A , B , D , V_{ij} , r_{ij} ainsi que les masses des quarks ordinaire et étrange ont été déterminés par

R. Ceuleneer et C. Semay [60] (pour le calcul relativiste) et B. Silvestre-Brac et C. Semay [55] (pour le cas non relativiste). La même forme d'interaction (2.2) est utilisée pour les deux types de cinématique que nous aurons à considérer. Cette force a été ajustée de sorte qu'elle reproduise correctement le spectre des hadrons. Les valeurs des paramètres sont donnés dans la table 3.1. Pour donner une idée de la qualité du spectre hadronique nous avons reporté dans la table 3.2 un certain nombre de résonances mésoniques obtenues à partir de ces deux forces.

TAB. 3.2 – Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs calculées par R. Ceuleneer et C. Semay [60], la deuxième ligne se réfère aux valeurs calculées par B. Silvestre-Brac et C. Semay [55] et la troisième ligne aux valeurs expérimentales.

π	π_1^e	ρ	ρ^e	b_1	K	K^*	K_1	ϕ	ϕ^e
0.130	1.074	0.779	1.425	0.965	0.486	0.881	1.245	1.005	1.669
0.138	1.318	0.770	1.572	1.108	0.488	0.904	1.270	1.021	1.711
0.138	1.300	0.770	1.450	1.235	0.495	0.892	1.270	1.020	1.680

La comparaison avec des calculs de type Faddeev pour les baryons et la résolution de l'équation de Schrödinger exacte pour les mésons montre qu'il n'est pas nécessaire de développer les fonctions d'onde d'espace de chaque agrégat au-delà de trois gaussiennes. Ainsi nous nous limiterons dans toute la suite à $n \leq 3$.

Les différents coefficients intervenant dans les fonctions d'onde du kaon et du nucléon $\alpha_i, c_i, \gamma_i, a_i$ sont donnés dans la table 3.3. Ils sont obtenus par minimisation de l'énergie de l'état fondamental des deux particules. Les masses générées pour le nucléon et le kaon à partir de ces grandeurs, pour les deux types de cinématique envisagées, ne sont pas très éloignées des valeurs expérimentales.

$$\text{Expérimental} \implies M_K = 0.495 \text{ GeV } M_N = 0.938 \text{ GeV}$$

Dans le cadre d'une cinématique relativiste nous obtenons :

$$1 \text{ gaussienne} \implies M_K = 0.576 \text{ GeV } M_N = 1.052 \text{ GeV}$$

$$3 \text{ gaussiennes} \implies M_K = 0.502 \text{ GeV } M_N = 1.000 \text{ GeV}$$

Pour le cas non relativiste, nous utilisons la force donnée en [55]. Les masses trouvées dans le cadre de cette cinématique non relativiste sont :

$$1 \text{ gaussienne} \implies M_K = 0.530 \text{ GeV } M_N = 1.059 \text{ GeV}$$

$$2 \text{ gaussiennes} \implies M_K = 0.489 \text{ GeV } M_N = 1.040 \text{ GeV}$$

$$3 \text{ gaussiennes} \implies M_K = 0.488 \text{ GeV } M_N = 1.039 \text{ GeV}$$

Comme prévu, pour chacune des deux cinématiques, les résultats convergent et se rapprochent de l'expérience au fur et à mesure que le nombre de gaussiennes prises en compte pour décrire les parties spatiales des fonctions d'onde du kaon et du nucléon augmente. Dans tout nos calculs, nous prenons le même nombre de gaussiennes pour décrire les fonctions d'onde d'espace des deux particules.

L'absence de forces à trois corps dans l'interaction est une explication possible pour comprendre l'écart entre la masse expérimentale du nucléon et la masse obtenue dans ce type d'approche. Cependant, nous pouvons penser que dans une certaine mesure de telles contributions sont prises en compte de manière indirecte lorsque nous imposons au potentiel de reproduire au mieux le spectre hadronique.

3.2 Influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages en onde S

Relativiste

Pour résoudre l'équation (2.86) nous utilisons la méthode du hamiltonien de Fourier sur réseau [60, 61, 62]. Cette méthode est basée sur le fait que les opérateurs énergie cinétique sont plus faciles à traiter dans l'espace de représentation des impulsions. Elle nécessite l'évaluation du noyau non local (2.87) en des points équidistants d'un réseau et génère directement l'amplitude $h(r)$ solution de l'équation de Salpeter aux mêmes points de ce réseau. Les déphasages sont alors déduits de (2.94).

Non relativiste

En pratique nous devons extraire numériquement la solution de l'équation de Hill-Wheeler par discrétisation de l'équation (2.88). Pour cela il est nécessaire d'introduire, comme déjà mentionné dans [54], un cut-off (r_c) destiné à traiter correctement l'intégrale de borne infinie présente dans l'équation (2.88). Nous supposons alors que la fonction d'onde relative $h(r)$ a atteint son comportement asymptotique pour $r > r_c$ (r_c représente la portée du potentiel non local $\chi_{NL}(k^2, r, r')$). La résolution de l'équation de Hill-Wheeler se réduit alors à trouver la solution d'un système d'équations linéaires. Les valeurs trouvées pour l'amplitude de la fonction d'onde relative $h(r)$ permettent de générer les déphasages KN à partir de (2.98).

Nous représentons sur la Figure 3.1 les déphasages obtenus pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire pour les deux canaux d'isospin possibles du système KN. Les résultats sont donnés pour une fonction d'onde d'espace développée sur 1 et 3 gaussiennes et comparés à ceux issus d'une cinématique non relativiste pour les quarks (obtenus à partir du potentiel 2.4).

Nous remarquons, pour les deux canaux d'isospin et quel que soit le nombre de gaussiennes considéré, une très faible différence entre résultats utilisant une cinématique relativiste et ceux utilisant une cinématique non relativiste qui s'accroît doucement avec

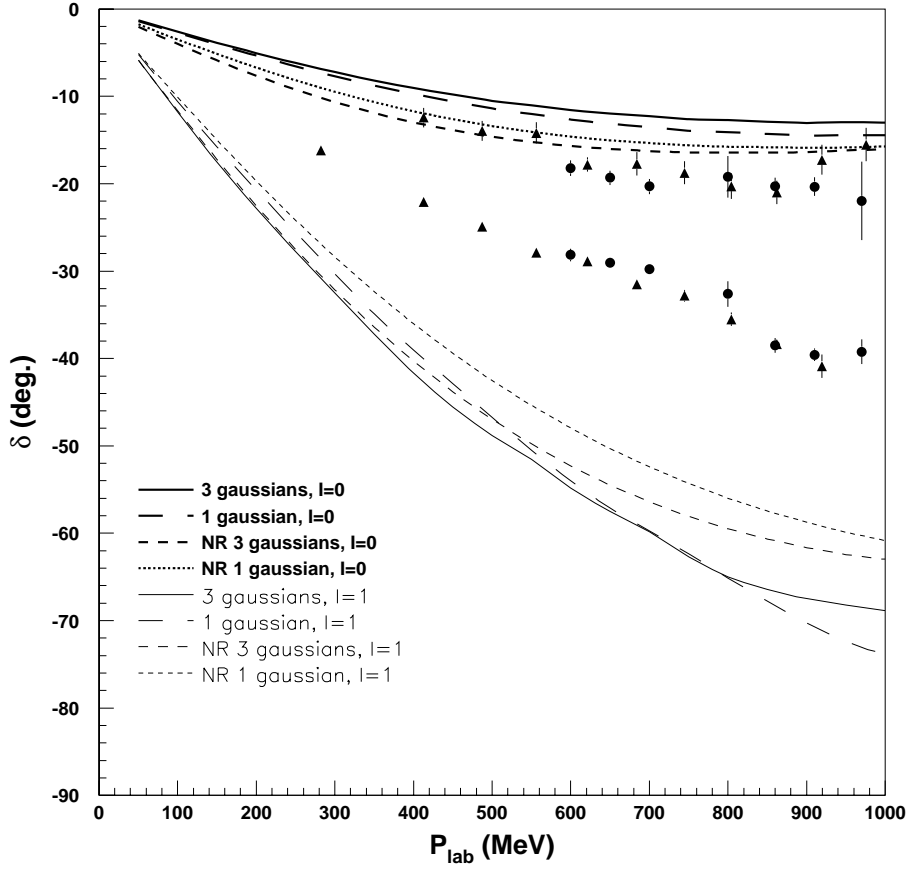


FIG. 3.1 – Déphasages relativistes KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire comparés à ceux obtenus à partir d'une cinématique non relativiste (NR). Les triangles et les cercles correspondent respectivement aux analyses en déphasage de Hyslop et al. [38] et Hashimoto [39].

l'énergie. Dans le canal d'isospin $I = 0$, nous notons une différence de $\approx 3^\circ$ entre les deux types de calcul alors que dans la voie d'isospin $I = 1$ la différence s'élève à $\approx 7^\circ$ pour une impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire de $1\text{GeV}/c$. L'effet d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN dans l'onde S est donc faible dans le cadre de ce modèle de quarks constituants.

Par conséquent, le bon accord entre expérience et résultats obtenus dans une approche non relativiste [54] pour le canal d'isospin $I = 0$ reste toujours vrai dans le cadre d'une cinématique relativiste pour les quarks. Les déphasages dans le canal d'isospin $I = 1$ restent quant à eux toujours trop négatifs comme cela était déjà le cas dans l'étude [54].

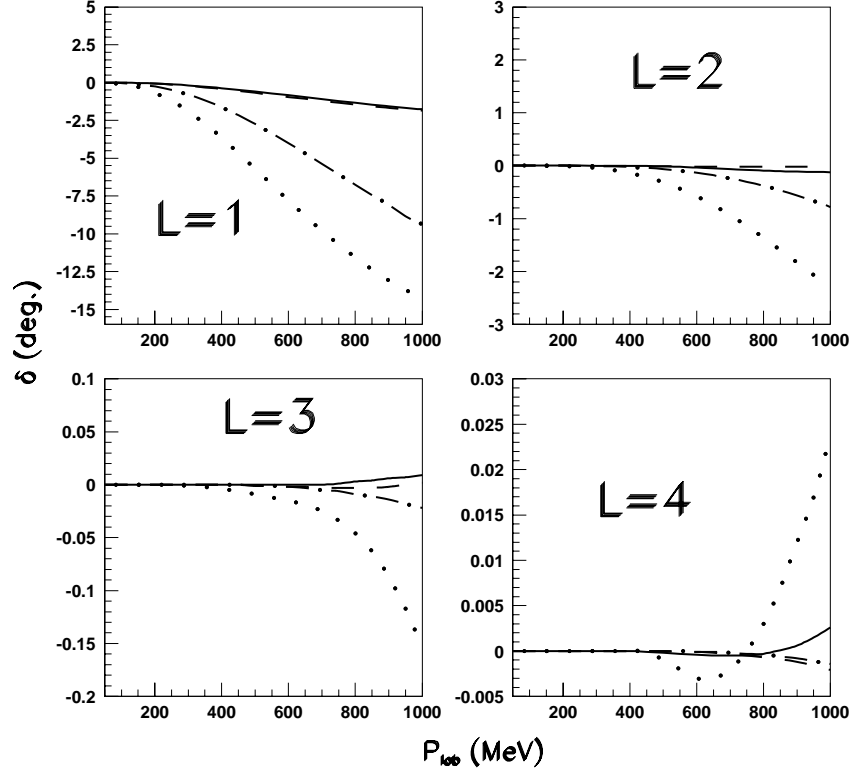


FIG. 3.2 – Déphasages non relativistes KN pour les ondes P, D, F, G en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire. Les courbes en trait plein et tiretés sont les résultats obtenus pour 1 et 3 gaussiennes dans le canal d'isospin $I = 0$. Dans la voie $I = 1$, la courbe en pointillés représente le résultat pour une gaussienne et celle en tiretés-points les résultats avec 3 gaussiennes (pour les ondes P, D) et 2 gaussiennes (pour les ondes F et G à cause d'un temps de calcul prohibitif).

3.3 Extension aux ondes P, D, F, G

Vu qu'il est raisonnable de penser que la cinématique des quarks du kaon et du nucléon est la même pour une diffusion dans un état de moment angulaire relatif $L > 0$ que dans un état S et vu que nous avons montré que l'influence d'une cinématique relativiste est faible pour les déphasages en onde S, nous allons étendre cette étude à des états de moments angulaire plus élevés dans le cadre d'une cinématique non relativiste. Nous utiliserons le potentiel donné en Table 3.1 et supposons donc que l'effet d'une cinématique relativiste sera le même pour les ondes $L > 0$ que pour l'onde S. A titre indicatif nous donnons Fig. 3.2 les résultats obtenus pour les déphasages KN pour les ondes P, D, F, G en gardant à l'esprit qu'une comparaison directe avec l'expérience n'est pas possible du fait de l'absence de terme spin-orbite dans l'interaction quark-quark.

Comme prévu, dans chacun des canaux d'isospin, le déphasage devient de plus en plus faible au fur et à mesure que le moment angulaire relatif des deux agrégats augmente (Fig.3.2).

Nos résultats sont tout à fait cohérents puisque ils se situent entre les données existantes sur les deux valeurs possibles du moment angulaire total du système KN [38, 39]. En effet, l'interaction quark-quark, que nous avons utilisée ici, ne contient pas de terme spin-orbite capable de discerner les deux canaux de moment angulaire total J obtenu pour chaque onde L ($L - \frac{1}{2}$, $L + \frac{1}{2}$). Une interaction de la même qualité que celle utilisée dans (2.4) et contenant un terme spin-orbite sera étudiée Chapitre 4.

TAB. 3.3 – Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 , α_i en GeV^2 et c_i en $GeV^{\frac{3}{2}}$, γ_i en GeV^2) obtenus pour une fonction d'onde d'espace du nucléon et du kaon développées sur n gaussiennes et pour les deux types de cinématique : relativiste ou non relativiste.

Potentiel	n	a_1	α_1	a_2	α_2	a_3	α_3
Relativiste	1	0.0123	0.1676	–	–	–	–
	3	0.0022	0.0891	0.0173	0.9254	0.0122	0.2446
Non relativiste	1	0.0045	0.0859	–	–	–	–
	2	0.0039	0.1851	0.0026	0.0689	–	–
	3	0.0015	0.0605	0.0033	0.1221	0.0021	0.3384
Potentiel	n	c_1	γ_1	c_2	γ_2	c_3	γ_3
Relativiste	1	0.1389	0.2259	–	–	–	–
	3	0.0155	0.0666	0.0781	0.2198	0.1179	1
Non relativiste	1	0.1019	0.1495	–	–	–	–
	2	0.0543	0.0975	0.0678	0.3793	–	–
	3	0.0245	0.8969	0.0651	0.2465	0.0372	0.0822

Chapitre 4

Déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G avec une cinématique non relativiste et une interaction spin-orbite

Expérimentalement les déphasages KN sont connus jusqu'aux ondes $L = 4$ pour les canaux d'isospin $I = 0$ et $I = 1$ [38, 39]. Il faut se rappeler que l'amplitude de diffusion KN dans la voie d'isospin $I = 0$ est moins bien déterminée car elle n'est accessible qu'à partir de la diffusion K^+ -deuteron (il n'existe pas de cibles de neutrons). Aussi dans ce chapitre nous allons nous consacrer au calcul des déphasages élastiques KN pour les ondes S, P, D, F, G en prenant une cinématique non relativiste pour les quarks du kaon et du nucléon [64]. En effet, dans le chapitre précédent nous avons vu qu'une approche utilisant une énergie cinétique relativiste à la fois dans la dynamique de chaque particule et pour le mouvement relatif du système KN avait une faible influence sur les déphasages dans l'onde S. Etant donné qu'il est raisonnable de penser que cet effet reste du même ordre pour des ondes $L > 0$ ceci justifie l'utilisation d'une cinématique non relativiste pour les quarks pour les ondes S, P, D, F, G. Une interaction quark-quark autorisant la comparaison avec les données expérimentales existantes sur les déphasages doit contenir un terme spin-orbite (ou tenseur) pour distinguer les ondes $L + \frac{1}{2}$ et $L - \frac{1}{2}$. Nous commencerons donc par donner les paramètres de l'interaction que nous avons utilisés. Nous pourrions alors déterminer les portées et amplitudes des fonctions d'onde du kaon et du nucléon grâce à un principe variationnel appliqué aux deux agrégats. La résolution de l'équation de Hill-Wheeler nous permettra d'établir les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G ainsi que des potentiels locaux équivalents. Enfin, l'extrapolation des déphasages aux régions de basse énergie pour les ondes S et P générera les longueurs et volumes de diffusion ainsi que les portées effectives issus de ce processus de diffusion.

4.1 Potentiel interquark, paramètres des fonctions d'onde et masses

Tous les paramètres intervenant dans le potentiel quark-quark (2.4) $\kappa, \lambda, D, \kappa', A, B$, mais aussi les masses des quarks ont été déterminés par B. Silvestre-Brac et C. Semay [55]

de sorte que le spectre des mésons et des baryons soit reproduit le plus convenablement possible. Les paramètres du terme spin-orbite de cette interaction (paramètres V_2, A', B') sont ajustés de façon que soit levée la dégénérescence des états de moment angulaire total J du spectre hadronique. Les valeurs des différents paramètres de cette force sont :

$$\begin{aligned}
 \kappa &= 0.5069 & \lambda &= 0.1653 \text{ GeV}^2 & D &= 0.8321 \text{ GeV} \\
 B &= 0.2204 & A &= 1.6553 \text{ GeV}^{B-1} & \kappa' &= 1.8609 \\
 m_u &= 0.3150 \text{ GeV} & m_d &= 0.3150 \text{ GeV} & m_s &= 0.5770 \text{ GeV} \\
 A' &= 1.5400 \text{ GeV}^{-B'-1} & B' &= 0.1400 & V_2 &= 0.8000 \text{ GeV}
 \end{aligned}$$

Pour donner une idée du spectre des hadrons obtenu à partir de cette interaction, nous reportons dans la table 4.1 les masses de quelques mésons appartenant au secteur des quarks ordinaires et étranges. Bien que certains états ne soient pas correctement repro-

TAB. 4.1 – Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs obtenues par le calcul et celle du bas aux valeurs expérimentales.

π	π^e	ρ	h_1	a_0	a_1	a_2	ϕ	ϕ^e	h'_1
0.139	1.303	0.770	1.095	0.986	1.164	1.229	1.020	1.694	1.366
0.138	1.300	0.770	1.170	0.983	1.230	1.318	1.020	1.680	1.380
f'_1	f'_2	K	K^e	K^*	K_1	K_0^*	K_1^*	K_2^*	K_2
1.384	1.456	0.490	1.464	0.903	1.255	1.198	1.293	1.355	1.694
1.512	1.525	0.495	1.460	0.892	1.270	1.429	1.402	1.425	1.773

duits, la plupart des masses sont en accord avec les valeurs expérimentales. Pour obtenir la quantité V_2 nous avons considéré le méson $a_0(983)$ comme un état formé d'une paire quark-antiquark pure. Etant donné que le statut de cette résonance n'est pas clair, ce choix

peut être contesté. Cependant, nous avons vérifié qu'une petite variation de ce paramètre ne change pas significativement le spectre obtenu.

Dans nos calculs nous restreindrons le développement des fonctions d'onde d'espace du kaon et du nucléon à deux gaussiennes au maximum (au delà les calculs deviennent très couteux en temps) en gardant à l'esprit que plus le nombre de gaussiennes est important plus les fonctions d'onde d'essai que nous avons pris pour décrire les particules se rapprochent des fonctions d'onde exactes. Les paramètres (α_i, a_i) , (γ_i, c_i) intervenant dans les fonctions d'onde du kaon et du nucléon sont donnés dans les tables 4.2 et 4.3 et donnent comme masses :

$$1 \text{ gaussienne} \implies M_K = 0.532 \text{ GeV} ; M_N = 1.055 \text{ GeV}$$

$$2 \text{ gaussiennes} \implies M_K = 0.493 \text{ GeV} ; M_N = 1.038 \text{ GeV}$$

Dans les deux calculs effectués nous avons utilisé le même nombre de gaussiennes pour le kaon et le nucléon. Il faut insister sur le fait que des études menées par le passé [54] ont constaté que la convergence des déphasages KN était rapide lorsque le nombre de gaussiennes prises en compte augmentait. Il a notamment été remarqué que l'écart en déphasage obtenu entre une fonction d'onde d'espace du kaon et du nucléon développée sur une et deux gaussiennes était de l'ordre de 8° pour l'onde S alors que l'effet du passage de deux à trois gaussiennes était beaucoup plus modeste. L'évolution des déphasages avec le nombre de gaussiennes reflète la convergence pour les masses du kaon et du nucléon, la contribution majeure venant du passage de une à deux gaussiennes. Ceci explique que nous ayons limité ici le développement des fonctions d'onde d'espace de chaque agrégat à deux gaussiennes.

Les masses obtenues pour les deux particules en train de diffuser, dans le cadre de ce modèle, sont en assez bon accord avec l'expérience et d'autant mieux que le nombre de gaussiennes prises en compte est important.

TAB. 4.2 – Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 et α_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du nucléon obtenu dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks et pour n gaussiennes.

n	a_1	α_1	a_2	α_2
1	0.0042	0.0819	–	–
2	0.0035	0.1706	0.0023	0.0654

TAB. 4.3 – Paramètres variationnels (c_i in $GeV^{\frac{3}{2}}$ et γ_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du kaon obtenu dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks et pour n gaussiennes.

n	c_1	γ_1	c_2	γ_2
1	0.0983	0.1424	–	–
2	0.0521	0.0926	0.0651	0.3577

4.2 Déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G

Les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G ont été calculés dans le cadre d'une cinématique non relativiste dans un modèle contenant un terme spin-orbite dans l'interaction quark-quark. Une comparaison directe des déphasages obtenus dans notre approche basée sur la méthode du groupe résonant avec ceux issus d'analyses en déphasages [38, 39] sera faite.

Comme dans l'étude précédente [63], l'équation de Hill-Wheeler est résolue par discrétisation de (2.88) en s'aidant des noyaux donnés dans l'Annexe A. Les déphasages sont déduits de (2.98) où la quantité $\gamma_L(k)$ est déterminée à partir de la solution $h(r)$ de l'équation de Hill-Wheeler correspondante. Il nous a fallu générer un réseau de près de 1000 points pour obtenir des résultats suffisamment stables. Les fonctions d'onde d'espace du kaon et du nucléon sont développées sur une et deux gaussiennes (données dans les tables 4.2 et 4.3). La décroissance rapide des noyaux non locaux $\chi_{NL}(k^2, r, r')$, nous permet de remplacer l'intégrale de borne infinie dans (2.88) par une intégrale finie en introduisant un cut-off r_c . Nous supposons alors que la fonction d'onde relative $h(r)$ a atteint son comportement asymptotique pour $r > r_c$. Cette méthode nous permet alors de remplacer la solution de l'équation de Hill-Wheeler par la solution d'un système d'équation linéaires. La résolution de ce système permet d'extraire les amplitudes de la fonction d'onde relative en chaque point du réseau.

Comme nous l'attendions, pour chaque canal d'isospin, les déphasages deviennent de plus en plus faibles au fur et à mesure que le moment angulaire relatif L , entre les deux agrégats, augmente (Fig. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5). Il faut insister sur le fait qu'aucun paramètre libre ne gouverne les résultats obtenus sur le processus de diffusion excepté r_c . Nous avons cependant vérifié que les déphasages trouvés sont indépendants de cette quantité dès que le nombre de points de notre réseau et r_c deviennent suffisamment grands.

Les résultats pour l'onde S (Fig.4.1) montrent un accord globalement satisfaisant avec les données expérimentales pour le canal d'isospin $I = 0$. En revanche, les résultats obtenus pour le canal d'isospin $I = 1$ restent trop importants et trop négatifs (trop de répulsion)

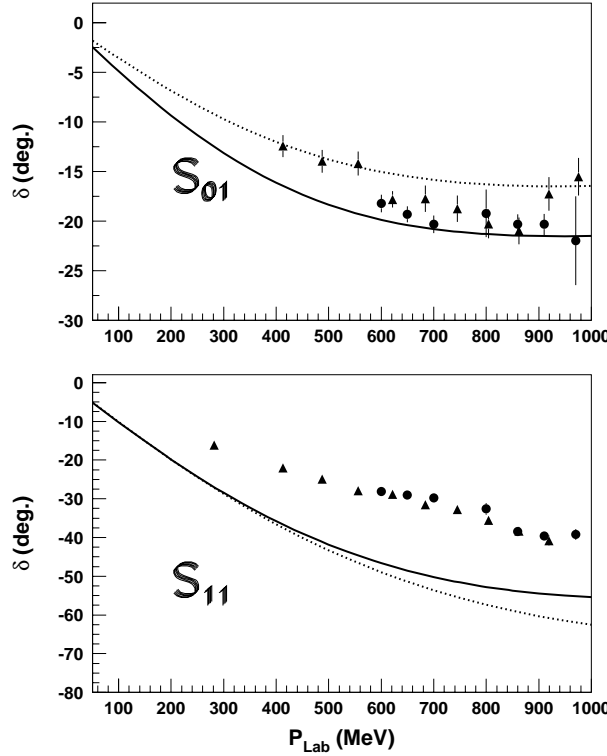


FIG. 4.1 – Déphasages KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire pour une gaussienne (ligne en traits pleins) et deux gaussiennes (ligne en traits pointillés). Les données expérimentales sont issues de [38, 39]. Le premier indice se réfère au nombre quantique d'isospin et le second à deux fois le moment angulaire total.

comme cela était déjà le cas dans [54]. Il faut également noter que dans un état de moment angulaire $L = 0$ il n'y a pas de contribution provenant des noyaux spin-orbite. Par conséquent, pour l'onde S seuls les termes centraux et hyperfins de l'interaction quark-quark contribuent au processus de diffusion.

Si nous regardons les états de moments angulaires plus élevés, il est intéressant de souligner que notre interaction quark-quark produit un splitting convenable entre les deux valeurs du moment angulaire total J pour chacun des moments angulaires orbitaux relatifs L considérés ($L - \frac{1}{2}$, $L + \frac{1}{2}$) et ce dans les deux voies d'isospin. Il faut noter également que pour des états de moment angulaire $L > 0$ la valeur absolue des déphasages est toujours sous-estimée par rapport à l'expérience dans la voie d'isospin $I = 0$. En revanche les ondes P_{11} , D_{13} , D_{15} et G_{19} sont particulièrement bien reproduites. Les déphasages que nous avons obtenu pour les ondes P_{03} , D_{05} , F_{07} sont en assez bon accord avec les données expérimentales compte tenu qu'une assez grande indétermination existe dans la

voie d'isospin $I = 0$.

Nous sommes cependant conscients qu'une bonne description des déphasages pour des états de moment angulaire élevé devrait inclure les contributions de processus plus compliqués à moyenne et longue portée.

Nous avons pu néanmoins, grâce à cette interaction quark-quark contenant un terme spin-orbite et reproduisant le spectre des hadrons, mettre l'accent sur le fait que la partie spin-orbite du potentiel interquark issu de la réduction non relativiste d'un diagramme d'échange d'un gluon entre deux quarks était nécessaire mais pas suffisante pour expliquer les déphasages pour les ondes $L \neq 0$ dans une gamme d'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire comprise entre 0 et 1 GeV/c. Il faut également garder à l'esprit la possibilité d'ouverture de voies inélastiques pour une impulsion du kaon de $P_{lab} = 850 \text{ MeV/c}$ [8]. Ces effets (apparition de voies inélastiques et prise en compte de phénomènes de moyenne et longue portée) ne sont pas présents dans notre approche et sont autant d'indices pouvant expliquer le désaccord entre résultats théoriques et expérimentaux.

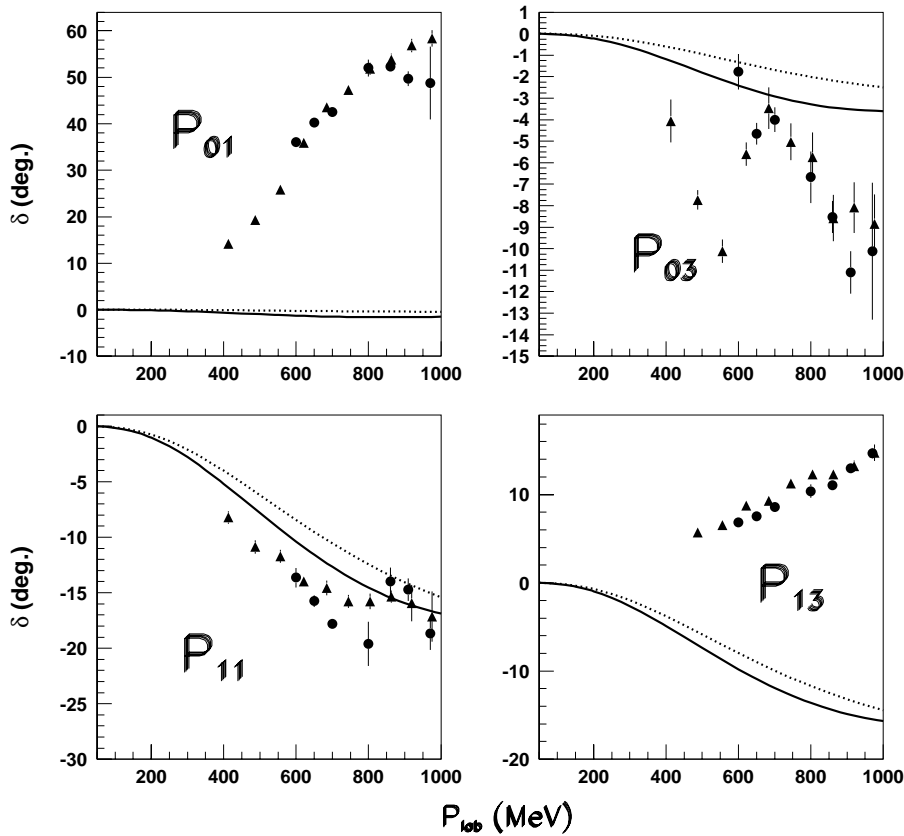


FIG. 4.2 – Déphasages KN pour l'onde P . Mêmes notations que pour la Fig. 4.1.

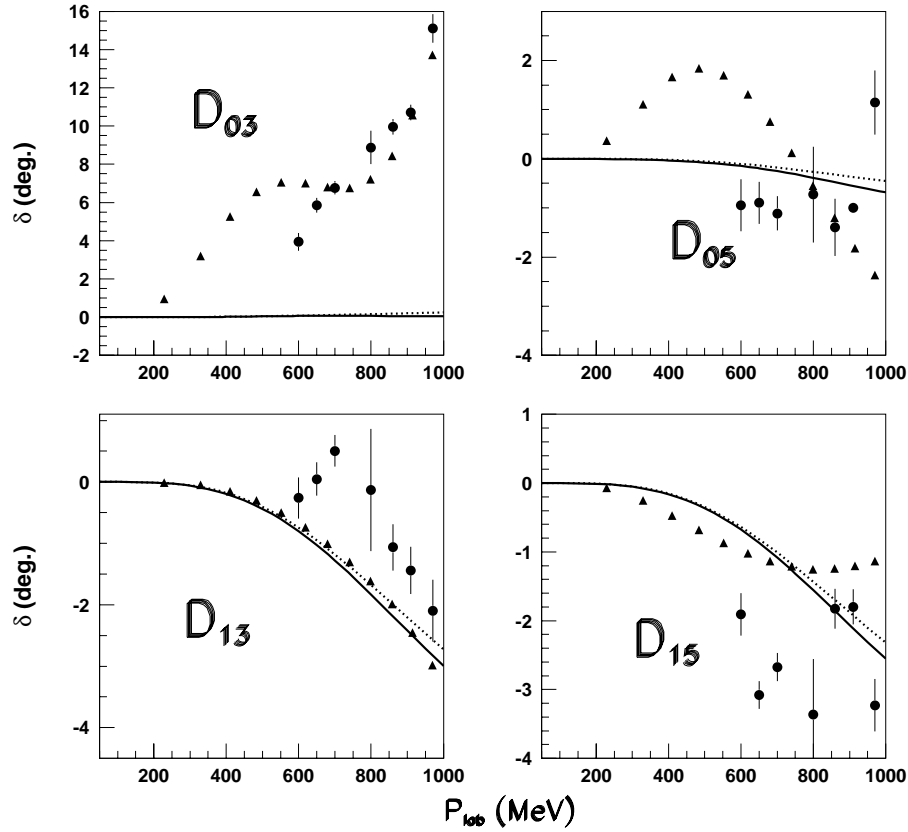


FIG. 4.3 – Déphasages KN pour l'onde D. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1.

Il est aussi très instructif de déterminer à partir de la solution de l'équation de Hill-Wheeler (2.88) des potentiels locaux équivalents pour chacune des ondes S, P, D, F, G et dans les deux voies d'isospin.

Potentiels locaux équivalents

L'équation de Hill-Wheeler (2.88) fait intervenir des noyaux non locaux qui sont difficiles à interpréter en termes d'énergie potentielle d'interaction entre le kaon et le nucléon. Il est très intéressant, pour parvenir à une évaluation quantitative du potentiel d'interaction KN, de définir des potentiels locaux équivalents à partir de l'équation de Hill-Wheeler régissant la diffusion des deux particules. Il existe de nombreuses façons de définir un potentiel local équivalent. Naturellement, les potentiels effectifs issus de définitions différentes peuvent présenter un comportement en fonction de la distance relative r des deux agrégats, très différent bien que menant aux mêmes déphasages. La complexité des calculs issus de la méthode du groupe résonant (RGM) fait qu'il serait intéressant de calculer ces potentiels locaux équivalents pour le processus de diffusion KN. Il s'agit de

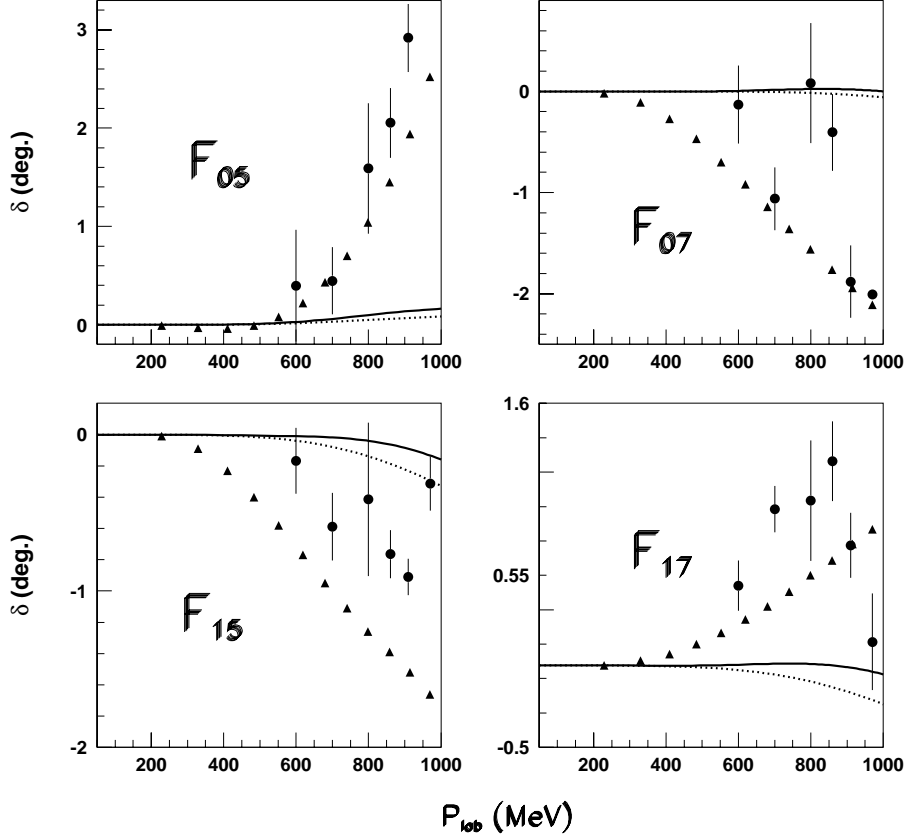


FIG. 4.4 – Déphasages KN pour l'onde F. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1.

trouver un potentiel local qui, introduit dans une équation de Schrödinger, conduit aux mêmes déphasages que ceux générés par l'équation de Hill-Wheeler (2.88).

Etant donné que la résolution de l'équation de Hill-Wheeler (2.88) nous donne la valeur de la fonction d'onde relative $h(r)$, nous choisissons de définir un potentiel local équivalent dépendant de l'énergie qui produirait la même fonction d'onde relative dans une équation de Schrödinger. Ce potentiel est défini par :

$$V(r) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{h(r)} \frac{d^2 h(r)}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + k^2 \right) \quad (4.1)$$

Les potentiels locaux équivalents obtenus à partir du potentiel (2.4), présenté précédemment, sont donnés Fig. 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 pour deux gaussiennes. Etant donné que ces potentiels dépendent de l'énergie, nous avons fixé arbitrairement l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire à $P_{lab} = 500 \text{ MeV}/c$. Les calculs pour d'autres valeurs d'impulsion du kaon ont été menés et montrent que l'aspect général des potentiels locaux équivalents obtenus est globalement indépendant de P_{lab} .

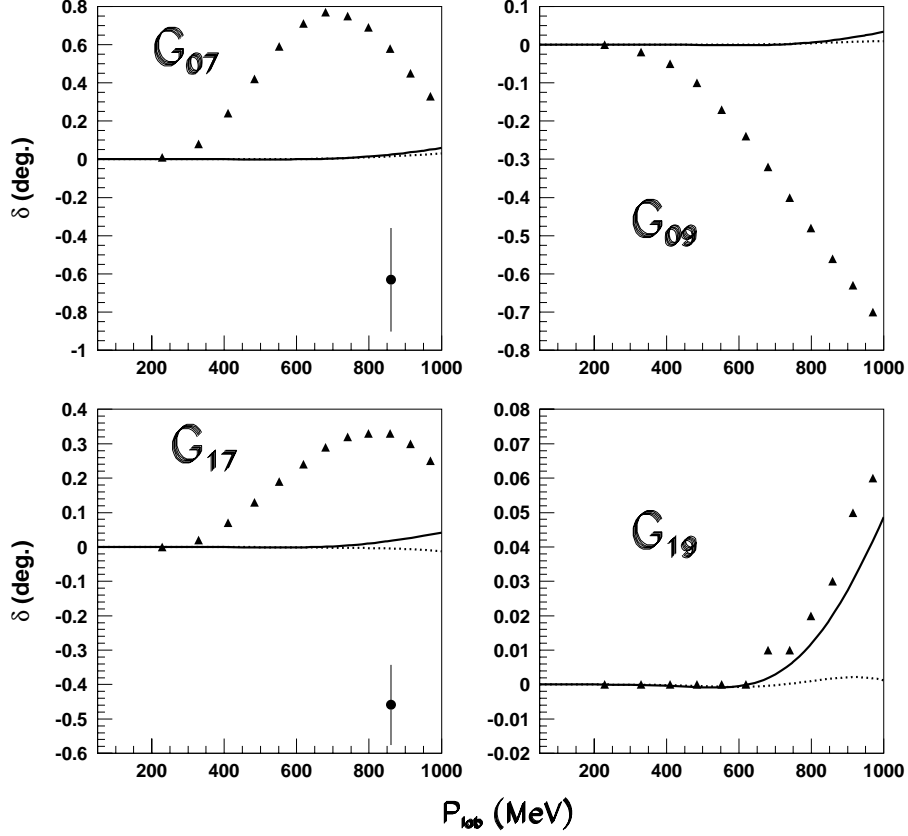


FIG. 4.5 – Déphasages KN pour l'onde G. Mêmes notations que pour la Fig. 4.1.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.6, le potentiel local équivalent généré pour l'onde S_{11} est quatre fois plus important que celui généré pour l'onde S_{01} confirmant ainsi l'excès de répulsion que nous avons obtenu pour le déphasage dans l'onde S_{11} Fig. 4.1.

Les potentiels locaux équivalents générés pour les ondes P_{11} et P_{13} ont des amplitudes similaires. De plus, vu que l'onde P_{11} est correctement reproduite Fig. 4.2 et que son potentiel local équivalent est répulsif Fig. 4.7, nous pouvons déduire un manque d'attraction dans l'interaction KN pour parvenir à une bonne reproduction de l'onde P_{13} .

Nous pouvons également souligner la faible amplitude du potentiel effectif pour l'onde P_{01} (Fig. 4.7), qui vient confirmer le manque d'attraction nécessaire pour reproduire les déphasages dans cette onde Fig. 4.2

Nous ne faisons pas de commentaires pour les autres ondes vu que l'interaction quark-quark que nous avons utilisée ne contient que l'échange de gluons qui sont des contributions de courtes portées. En effet, une bonne description des ondes plus élevées nécessiterait la prise en compte de termes de moyenne et longue portée. Nous avons également établi, à partir de l'extrapolation des déphasages S, P, D, F, G à basse énergie, les longueurs et

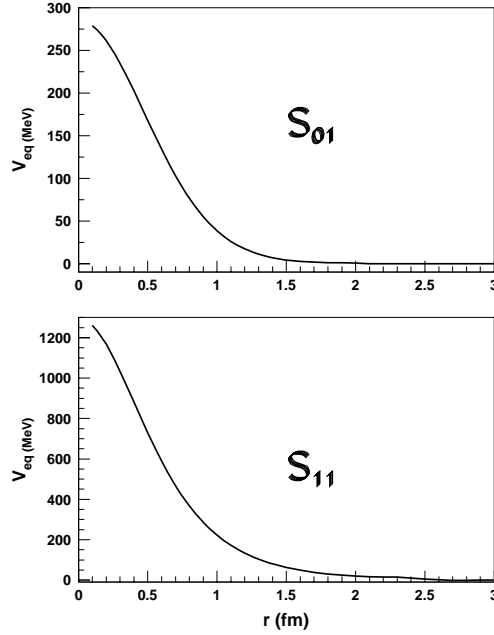


FIG. 4.6 – Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde S.

volumes de diffusion (grâce aux ondes S et P) ainsi que les portées effectives (grâce aux ondes S) pour chaque voie d'isospin.

Portées effectives, longueurs et volumes de diffusion

Pour compléter l'étude de la diffusion KN dans ce modèle de quarks constituants, nous allons comparer les valeurs des portées effectives, longueurs et volumes de diffusion obtenus à partir des déphasages calculés précédemment (table 4.4) avec les données expérimentales (tables 4.5 et 4.6). Ces quantités sont définies comme suit :

$$k^{2L+1} \cotan(\delta_{J,L}^I) = \frac{1}{a_{J,L}^I} + \frac{1}{2} r_{J,L}^I k^2 \quad (4.2)$$

où $a_{J,L}^I$ est la longueur (pour $L = 0$) ou le volume (pour $L = 1$) de diffusion ; $r_{J,L}^I$ est la portée effective ; $\delta_{J,L}^I$ est le déphasage calculé à partir de (2.98).

La longueur de diffusion obtenue pour l'onde S_{01} reproduit correctement les longueurs de diffusion expérimentales compte tenu de l'incertitude existant sur la détermination des valeurs expérimentales des longueurs de diffusion dans le canal d'isospin $I = 0$.

L'excès de répulsion obtenu pour les déphasages KN pour l'onde S_{11} se traduit par une longueur de diffusion beaucoup trop grande et une portée effective trop faible par rapport aux valeurs expérimentales.

La trop grande incertitude existant sur la détermination du volume de diffusion pour

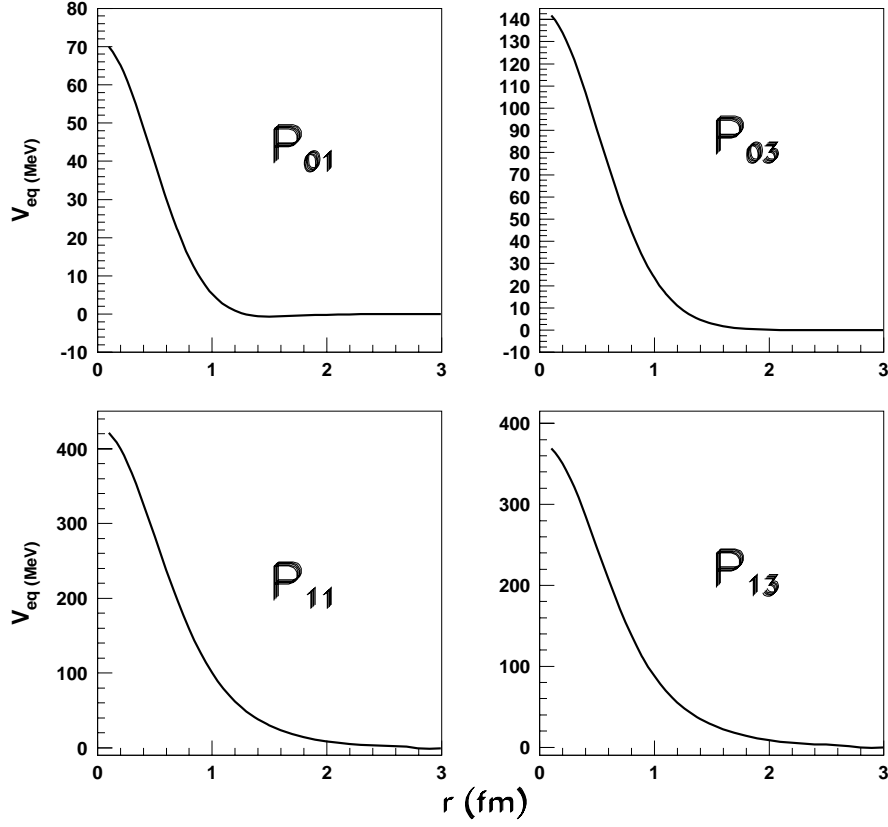


FIG. 4.7 – Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde P.

l'onde P_{01} rend la comparaison avec notre résultat difficile. Notre valeur se situe cependant entre les volumes de diffusion extrêmes issues des analyses en déphasage.

Les volumes de diffusion obtenus pour les ondes P_{03} et P_{11} reproduisent correctement les valeurs issues d'expériences confirmant ainsi le bon accord que nous avons obtenu pour les déphasages dans ces ondes alors que le manque d'attraction dans l'interaction KN pour les déphasages dans l'onde P_{13} se traduit par un volume de diffusion en désaccord avec les analyses en déphasage.

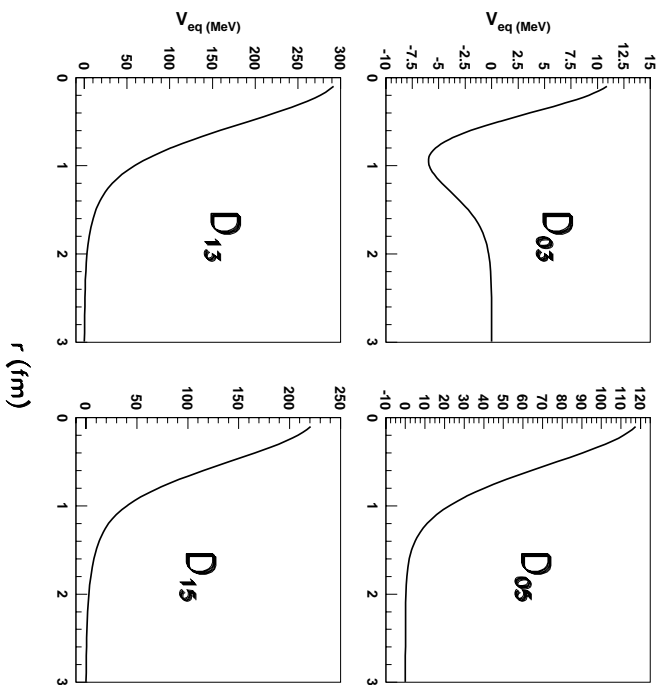


FIG. 4.8 – Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde D.

$a_{S\frac{1}{2}}^0$ (fm)	$a_{S\frac{1}{2}}^1$ (fm)	$r_{S\frac{1}{2}}^1$ (fm)	$a_{P\frac{1}{2}}^0$ (fm ³)	$a_{P\frac{1}{2}}^1$ (fm ³)	$a_{P\frac{3}{2}}^0$ (fm ³)	$a_{P\frac{3}{2}}^1$ (fm ³)
-0.14	-0.6	0.13	-0.002	-0.010	-0.022	-0.17

TAB. 4.4: Longueurs de diffusion et portées effectives (obtenue à partir de l'onde S) (en fm) et volumes de diffusion (fm³) pour l'onde P dans le cadre de notre modèle de quarks constituants et pour les deux canaux d'isospin $I = 0$ et $I = 1$.

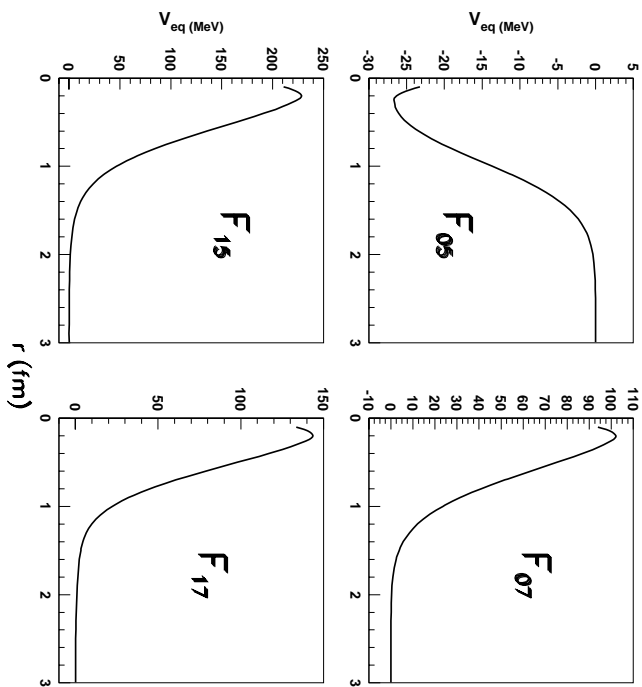


FIG. 4.9 – Potentiel local équivalent en MeV obtenu à partir de (4.1) pour l'onde F.

$a_{S\frac{1}{2}}^0$ (fm)	$a_{P\frac{1}{2}}^0$ (fm^3)	$a_{P\frac{3}{2}}^0$ (fm^3)	Référence
0.04 ± 0.04	—	—	[31]
$-0.11^{+0.06}_{-0.04}$	—	—	[72]
-0.021 ± 0.006	-0.064	0.067	[43]
0.18	0.14	-0.029	[43]
-0.042	0.17	-0.031	[43]
-0.035	0.086	-0.019	[11]

TAB. 4.5: Longueurs de diffusion pour l'onde S (en fm) et volumes de diffusion (fm^3) pour l'onde P issus d'analyses en déphasage dans le canal d'isospin $I = 0$ pour la diffusion K^+N .

$a_{S\frac{1}{2}}^1$ (fm)	$r_{S\frac{1}{2}}^1$ (fm)	$a_{P\frac{1}{2}}^1$ (fm^3)	$a_{P\frac{3}{2}}^1$ (fm^3)	Référence
-0.29 ± 0.015	0.5 ± 0.15	-	-	[12]
-0.28 ± 0.01	-	-	-	[65]
-0.31 ± 0.01	0.4 ± 0.14	-	-	[66]
-0.283 ± 0.006	0.54 ± 0.09	-0.018 ± 0.005	0.011 ± 0.002	[67] ¹
-0.292 ± 0.006	0.35 ± 0.09	-0.028 ± 0.003	0.016 ± 0.001	[67] ²
-0.305 ± 0.012	-	-0.035 ± 0.006	0.007 ± 0.008	[68]
-0.32 ± 0.01	-	-0.023 ± 0.001	0.016 ± 0.002	[69]
-0.309 ± 0.002	0.32 ± 0.02	-0.021	0.013	[70]
-0.312	-	-0.054	0.026	[18, 71] ³
-0.32	-	-0.032	0.021	[11]

TAB. 4.6: Longueurs de diffusion et portées effectives pour l'onde S (en fm) et volumes de diffusion (fm^3) pour l'onde P issus d'analyses en déphasage dans le canal d'isospin $I = 1$ pour la diffusion K^+N .

Fin du tableau

¹ $G^2 = 7$ avec $G^2 = \frac{g_{N\Delta K}^2 + g_{N\Sigma K}^2}{4\pi}$

² $G^2 = 14$

³Il s'agit de la solution (i). Les solutions (ii), (iii) et (iv) sont très similaires.

Chapitre 5

Influence de termes de moyenne et longue portée sur les déphasages KN

Dans les chapitres 3 et 4 nous avons appris que, dans ce modèle de quarks constituants basé sur la méthode du groupe résonant,

- l'influence d'une cinématique relativiste pour les quarks de chaque agrégat était très faible pour l'onde S.
- les contributions venant des termes d'échange de gluons n'étaient pas suffisantes pour expliquer les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G.

Jusqu'à maintenant nous n'avons pris en compte que des contributions de termes de courte portée, par l'intermédiaire de l'échange de gluons entre les quarks. Or, il est raisonnable de penser qu'une bonne description de l'interaction KN nécessiterait la prise en compte de termes de moyenne et longue portée. Ces termes, très compliqués au niveau des quarks et des gluons ont été paramétrés par certains groupes [73, 74] de façon effective par des échanges de champs de type mésoniques. Aussi, nous avons calculé, à partir d'une force interquark reproduisant le spectre des mésons et contenant les contributions des champs mésoniques associés au σ et à son partenaire chirale π , les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G. Nous avons choisi d'utiliser ici une interaction déterminée par le groupe de Salamanque [75] de façon à reproduire au mieux le spectre des mésons.

Nous commencerons par donner les valeurs des différents paramètres de cette interaction quark-quark. Puis nous déduirons, à partir d'un principe variationnel sur les fonctions d'onde du K et du N, les amplitudes et portées de leurs fonctions d'onde à partir desquelles nous calculerons les déphasages pour les ondes S, P, D, F, G.

5.1 Potentiel interquark

Nous utilisons un potentiel interquark [75] défini par :

$$V_{ij}(r) = V_{OGE}(r) + V_{conf}(r) + V_{PS}(r) + V_S(r) \quad (5.1)$$

avec

$$V_{OGE}(r) = -\frac{3}{16} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j v_{OGE}(r) \quad (5.2)$$

où

$$v_{OGE}(r) = -\frac{4}{3}\alpha_S \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) + \frac{2}{3m_i m_j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right] \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2 r} \right\} \\ + \frac{\alpha_S^2}{4\pi} \frac{\ln\left(\frac{m_i}{m_j}\right)}{m_i m_j} \left[\frac{8}{9} \frac{m_i - m_j}{m_i + m_j} + \frac{1}{9} \frac{m_i + m_j}{m_i - m_j} \right] \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2 r} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j + D \quad (5.3)$$

$$V_{conf}(r) = -\frac{3}{16} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j v_{conf}(r) \quad (5.4)$$

où

$$v_{conf}(r) = a (1 - e^{-\mu r}) \quad (5.5)$$

$$V_S(r) = -\alpha_{ch} \frac{4m^2}{m_\pi^2} \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - m_\sigma^2} m_\sigma \left\{ \left[Y(m_\sigma r) - \frac{\Lambda_1}{m_\sigma} Y(\Lambda_1 r) \right] + \right. \\ \left. \frac{m_\sigma^2}{4m^2} \left[G(m_\sigma r) - \frac{\Lambda_1^3}{m_\sigma^3} G(\Lambda_1 r) \right] \vec{l}_{ij} \cdot \vec{s}_{ij} \right\} \quad (5.6)$$

$$V_{PS}(r) = \frac{1}{3} \alpha_{ch} \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - m_\pi^2} m_\pi \left[Y(m_\pi r) - \frac{\Lambda_1^3}{m_\pi^3} Y(\Lambda_1 r) \right] \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j \quad (5.7)$$

avec

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad ; \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) Y(x)$$

Ce potentiel comprend une partie courte portée venant du diagramme d'échange d'un gluon entre deux quarks (5.3). La partie confinante (5.4) de l'interaction diffère de celle que nous avons utilisée dans les chapitres précédents essentiellement à longue portée ($r \rightarrow \infty$). A courte portée, le comportement du potentiel de confinement est similaire à celui présenté dans le chapitre 2 :

$$V_{conf}(r) \propto r \quad (5.8)$$

Les contributions de portée plus importante sont incluses grâce au champ mésoniques associés au σ (5.6) et à son partenaire chiral le π (5.7). Les valeurs des différents paramètres de cette interaction sont :

$$\alpha_S = 0.485 \quad r_0 = 0.476 \text{ GeV}^{-1} \quad D = -0.812$$

$$a = 2.667 \text{ GeV} \quad \mu = 0.079 \text{ GeV} \quad \alpha_{ch} = 0.027$$

$$\Lambda_1 = 0.829 \text{ GeV} \quad m_\pi = 0.138 \text{ GeV} \quad m_\sigma = 0.675 \text{ GeV}$$

$$m = 0.313 \text{ GeV} \quad m_{\bar{s}} = 0.560 \text{ GeV}$$

Ils ont été ajustés par le groupe de Salamanque [75] de façon à reproduire au mieux le spectre des mésons. Nous donnons table 5.1 quelques masses générées par ce potentiel.

TAB. 5.1 – Masses des mésons (en GeV) obtenues après minimisation de l'énergie de leur état fondamental. La première ligne se réfère aux valeurs calculées par Fernandez et al. [75] et la deuxième aux valeurs expérimentales.

π	ρ	η	ω	K	K^*	ϕ
0.138	0.770	0.699	0.731	0.647	0.900	0.997
0.138	0.770	0.547	0.782	0.495	0.892	1.020

5.2 Paramètres des fonctions d'onde et masses

TAB. 5.2 – Paramètres variationnels (a_i en GeV^3 et α_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du nucléon obtenus dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks avec échange de champs mésoniques et pour 1 gaussienne.

n	a_1	α_1
1	0.0052	0.0944

Comme précédemment les différents paramètres des fonctions d'onde du kaon et du nucléon ont été déterminés par minimisation de l'énergie de leur état fondamental (table 5.2 et 5.3). Nous avons restreint le calcul des déphasages KN à des fonctions d'onde d'espace développées sur une gaussienne. En effet, nous connaissons déjà l'effet du passage de une à deux gaussiennes et même au delà. Aussi, en supposant que cet effet soit le même dans cette approche prenant en compte l'échange des champs mésoniques associés au σ et au pion, et compte tenu du mauvais accord avec les données expérimentales des déphasages KN pour un calcul réalisé avec une gaussienne, nous avons jugé que l'extension des calculs à deux gaussiennes (très couteuse en temps de calcul) n'améliorerait pas de façon significative l'accord avec l'expérience.

Les masses du nucléon et du kaon que nous avons obtenues dans cette approche incluant l'échange de contributions de moyenne et longue portée et pour une fonction d'onde d'espace développée sur une gaussienne sont :

$$1 \text{ gaussienne} \implies M_K = 0.776 \text{ GeV} ; M_N = 0.980 \text{ GeV}$$

Grâce aux paramètres de l'interaction quark-quark et à ceux des fonctions d'onde du kaon et du nucléon, nous allons calculer les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G.

TAB. 5.3 – Paramètres variationnels (c_i in $GeV^{\frac{3}{2}}$ et γ_i en GeV^2) de la fonction d'onde d'espace du kaon obtenus dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks avec échange de champs mésoniques et pour 1 gaussienne.

n	c_1	γ_1
1	0.0812	0.1105

5.3 Déphasages KN

Les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G ont été calculés dans le cadre d'une cinématique non relativiste des quarks en utilisant une interaction quark-quark incluant en plus des champs associés aux gluons, ceux associés au σ et au pion. L'équation de Hill-Wheeler décrivant ce processus de diffusion incluant ces termes de moyenne et longue portée est donnée par :

$$\frac{d^2 h(r)}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} h(r) + k^2 h(r) - 3m \widetilde{V}_\sigma(r, J, L; I) h(r) + \int_0^\infty dr' [\chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I)] \frac{h(r')}{r'} = 0 \quad (5.9)$$

où

$$k = \sqrt{\frac{m\widetilde{E}}{\hbar^2}}$$

$\widetilde{E} = E - \epsilon_N - \epsilon_K$ est l'énergie relative des deux particules dans le référentiel du centre de masse ; ϵ_K et ϵ_N sont les énergies internes de chaque cluster définies Eq.(2.22) et Eq.(2.46). Le noyau non local χ_{NL} peut s'exprimer à l'aide des noyaux d'échange suivants :

$$\chi_{NL}(k^2, r, r', J, L; I) = -3k^2 \mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(e)} + \frac{3m}{\hbar^2} (\mathcal{K}_R(r, r', J, L; I)^{(e)} + \mathcal{V}(r, r', J, L; I)^{(e)})$$

La définition de ces noyaux non locaux est identique à celle donnée au chapitre 2 en utilisant comme potentiel celui défini par Fernandez et al. Eq. (5.1). Ils sont tous regroupés dans l'annexe A.

L'échange direct de champs mésoniques associés au pion est interdit pour des raisons de conservation de parité. Par contre, l'échange direct du champ mésonique associé au σ est autorisé entre deux quarks. Cette contribution se manifeste par le terme $\widetilde{V}_\sigma(r, r', J, L; I)$. Elle est définie à partir de (5.6) par :

$$\widetilde{V}_\sigma(r, r', J, L; I) = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | V^{(\sigma, e)} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (5.10)$$

où $V^{\sigma,(c)} = 3V_{24}^{\sigma,(c)} + 3V_{25}^{\sigma,(c)}$ et $V_{ij}^{\sigma,(c)}$ représente la partie centrale du potentiel associé au champ mésonique du σ Eq. (5.6). Son expression est donnée dans l'annexe A.

Comme dans le chapitre précédent, les déphasages sont extraits à partir de l'équation de Hill-Wheeler (5.9) après discrétisation sur un réseau de près de 1000 points. La décroissance rapide des noyaux locaux $\widetilde{V}_\sigma(r, r')$ et non locaux $\chi_{NL}(k^2, r, r')$ de (5.9) nous permet d'introduire un cut-off r_c afin de rendre finie la borne infinie de l'intégrale de l'équation (5.9). Ainsi dès que $r > r_c$ nous supposons que $h(r)$ a atteint son comportement asymptotique. Il nous suffit alors de résoudre un système d'équations linéaires pour trouver l'amplitude de la partie radiale de la fonction d'onde relative du système KN. Cette solution est alors utilisée dans (2.98) afin de calculer les déphasages pour les ondes S, P, D, F, G.

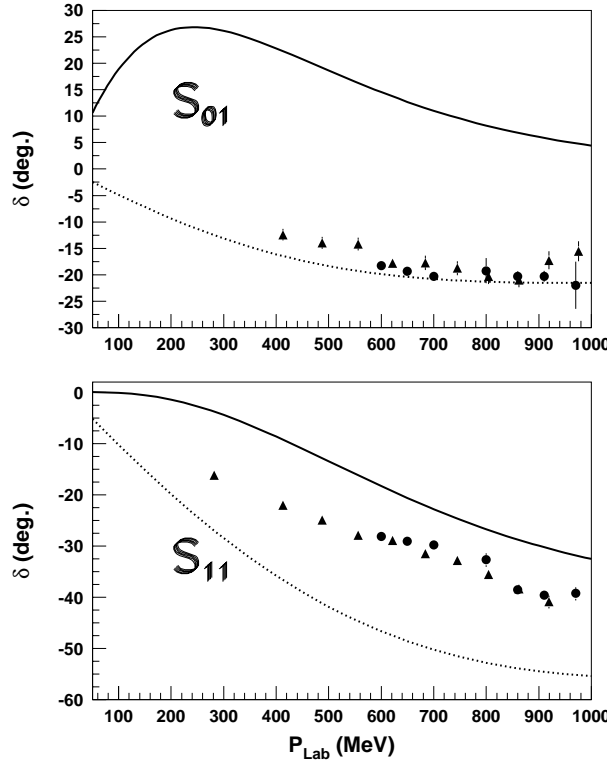


FIG. 5.1 – Déphasages KN pour l'onde S en fonction de l'impulsion du kaon dans le référentiel du laboratoire pour une gaussienne (ligne en traits pleins). Les déphasages obtenus au chapitre 2 sont donnés pour comparaison en traits pointillés. Les données expérimentales sont issues de [38, 39]. Le premier indice se réfère au nombre quantique d'isospin et le second à deux fois le moment angulaire total.

Nous remarquons que globalement les résultats obtenus à partir de cette approche prenant en compte des contributions de moyenne et longue portée ne sont pas améliorés

par rapport à ceux obtenus dans les chapitres précédent. En effet, l'introduction du champ mésonique associé au σ apporte un gain d'attraction pour l'onde S dans les deux voies d'isospin. Ainsi, l'onde S_{11} (Fig. 5.1) qui était trop répulsive dans une approche ne prenant en compte que l'échange de gluons entre les quarks (chapitre 2) devient maintenant en meilleur accord avec les données expérimentales. L'onde S_{01} (Fig. 5.1) bénéficie elle aussi de ce gain d'attraction détériant de ce fait le bon accord que nous avions obtenu au chapitre précédent.

Pour les ondes de moment angulaire plus élevé, l'amélioration de la description de certaines ondes s'accompagne de la détérioration des autres. Ainsi, dans ce modèle incluant des échanges de moyenne et longue portée, les ondes P_{13} , D_{03} , F_{05} , F_{17} et G_{17} (Fig. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5) sont nettement améliorées par rapport au chapitre précédent et pour certaines un bon accord avec les valeurs expérimentales est obtenu.

Par contre, les ondes P_{11} , D_{13} , D_{15} et G_{19} (Fig. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5) qui étaient très bien reproduites au chapitre 2, ne le sont plus avec le type d'interaction proposé par le groupe de Salamanque. Les ondes P_{03} , D_{05} et F_{07} (Fig. 5.2, 5.3, 5.4) quant à elles ne sont plus décrites correctement, même partiellement, alors qu'elles l'étaient auparavant.

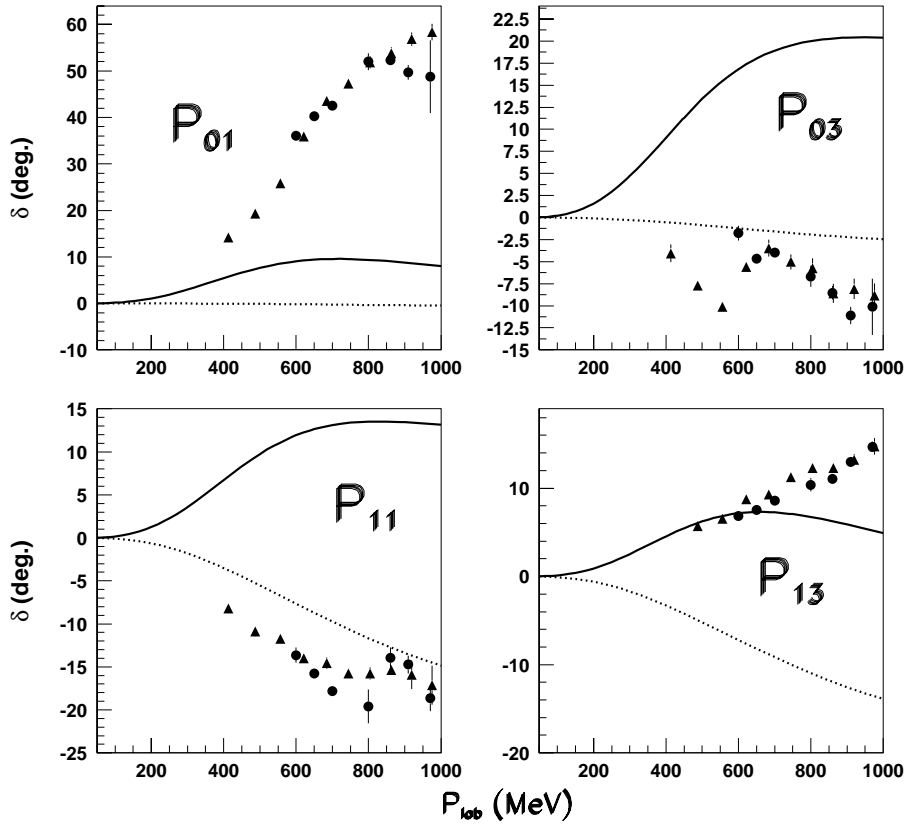


FIG. 5.2 – Déphasages KN pour l'onde P. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1.

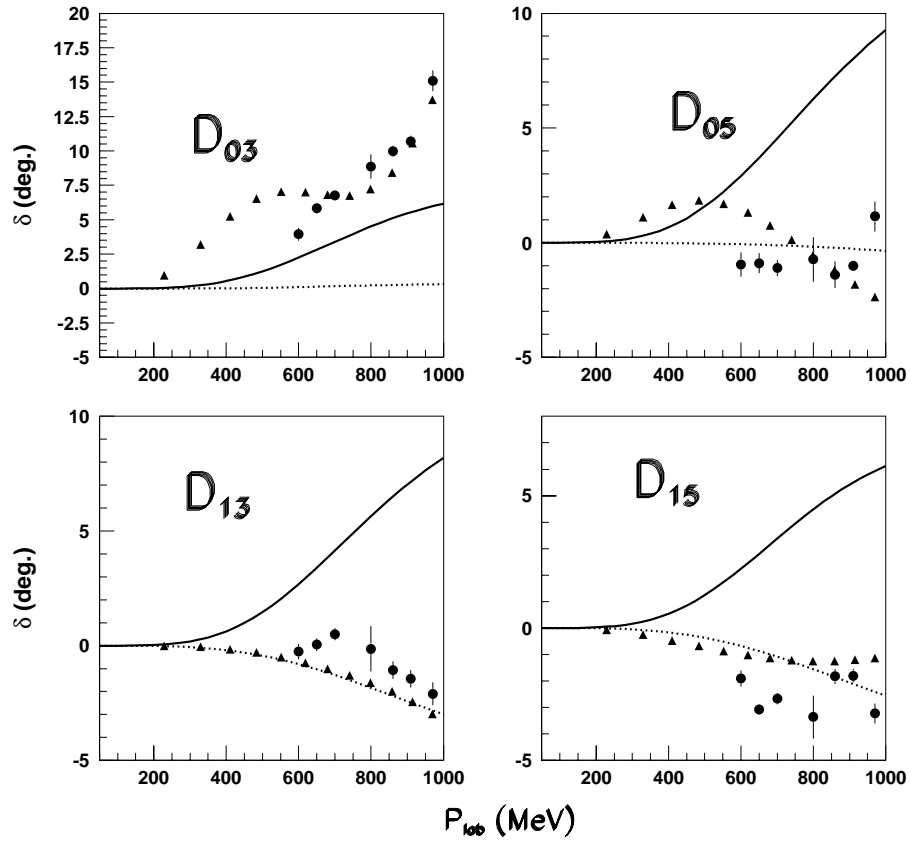


FIG. 5.3 – Déphasages KN pour l'onde D. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1.

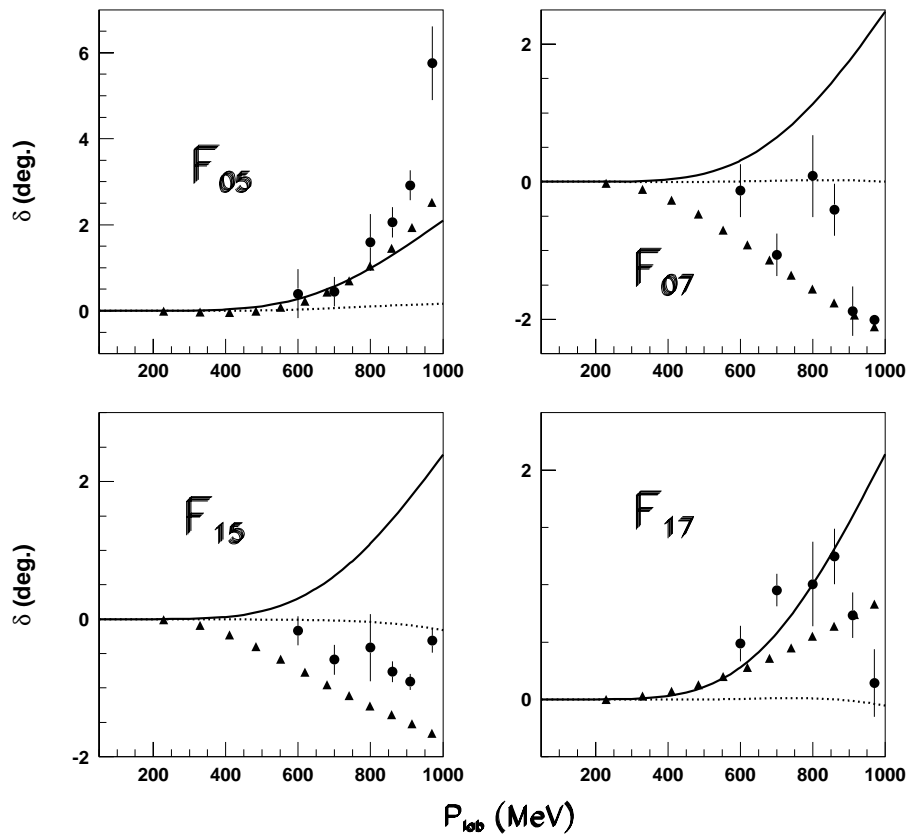


FIG. 5.4 – Déphasages KN pour l'onde F . Mêmes notations que pour la Fig. 5.1.

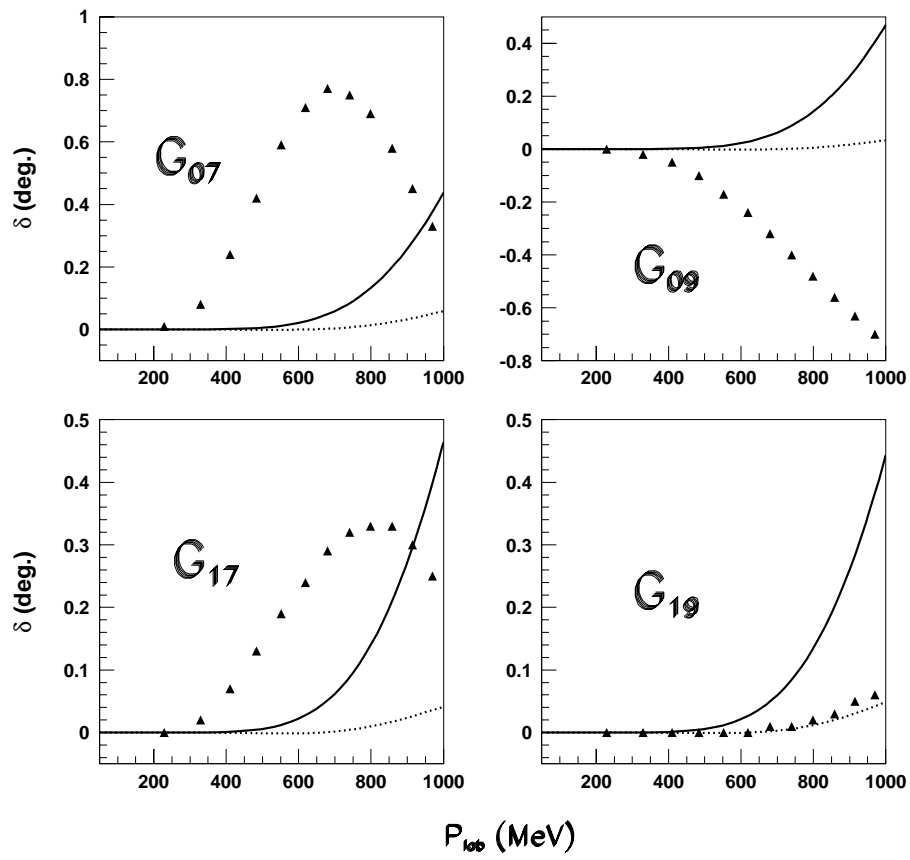


FIG. 5.5 – Déphasages KN pour l'onde G. Mêmes notations que pour la Fig. 5.1.

Conclusion

Nous avons étudié la diffusion kaon-nucléon dans un modèle de quarks constituants. Pour cela nous avons utilisé une méthode variationnelle, la méthode du groupe résonant (RGM), qui est particulièrement efficace pour traiter la diffusion de particules composites. Nous avons essayé de traiter ce problème de diffusion de la façon la plus cohérente dans un souci de réduire autant que possible les approximations. Il nous est en effet apparu essentiel de différencier les effets dûs à une mauvaise description physique de ceux issus d'une approche basée sur trop d'approximations. Pour cela nous avons choisi d'imposer, tout au long de ce travail, trois contraintes :

1. La même interaction entre quarks est utilisée pour construire les fonctions d'ondes du kaon et du nucléon ainsi que pour générer la dynamique du système KN.
2. Cette interaction quark-quark doit donner une bonne description du spectre des mésons et des baryons.
3. La fonction d'onde relative du système KN est laissée complètement libre de prendre la forme imposée par la dynamique du système KN. Aucune paramétrisation n'a été supposée.

Ces trois conditions et surtout celle concernant le développement de la fonction d'onde relative du système KN sur une base continue rendent les calculs des différentes quantités nécessaires à la détermination des déphasages très lourds et difficiles. Nous y sommes néanmoins parvenus et nous sommes maintenant assurés que le traitement de ce problème de diffusion ne contient plus d'approximations brutales.

Nous avons pu tout d'abord déterminer l'influence d'une cinématique relativiste sur les déphasages KN pour l'onde S. Les résultats obtenus à partir d'une énergie cinétique relativiste des quarks sont très proches de ceux générés par une cinématique non relativiste. Par conséquent, l'utilisation d'une cinématique relativiste ne modifie pas l'accord existant entre déphasages théoriques et expérimentaux pour l'onde S dans la voie d'isospin $I = 0$ et l'excès de répulsion dans le canal d'isospin $I = 1$, tels qu'ils avaient déjà été observés dans des calculs prenant une cinématique non relativiste pour les quarks.

En faisant l'hypothèse que la cinématique des quarks de chacune des particules reste la même pour les ondes $L > 0$ que pour l'onde S et en s'aidant du fait que l'influence d'une cinématique relativiste est faible pour l'onde S, nous avons calculé les déphasages KN pour les ondes (P, D, F, G) en prenant une cinématique non relativiste pour les quarks.

En l'absence de terme spin-orbite dans l'interaction quark-quark, le déphasage obtenu dans une voie de moment angulaire L est indépendant du moment cinétique total du système KN rendant la comparaison directe avec l'expérience impossible. Les résultats

paraissent cependant très raisonnables puisque pour chaque voie d'isospin, ils se situent entre les données propres aux deux valeurs possibles du moment cinétique total du système KN.

Nous avons par la suite inclu dans l'interaction quark-quark un terme spin-orbite afin de comparer nos résultats pour les ondes P, D, F, G directement avec l'expérience. Les paramètres de cette force ont été déterminés de telle façon que le spectre des hadrons soit correctement reproduit. Les résultats obtenus pour les ondes P_{11} , D_{13} , D_{15} , dans ce modèle de quarks constituants, sont en accord avec les déphasages expérimentaux alors que ce n'est pas le cas pour les autres ondes. Il faut garder à l'esprit que notre approche ne possède aucun paramètre libre. Les résultats ne peuvent donc être ajustés avec l'expérience.

La différence entre les données expérimentales sur les déphasages KN et nos résultats pour les ondes S, P, D, F, G nous incite à penser que probablement certains ingrédients physiques manquent dans notre traitement. En effet, en ne considérant que l'échange de gluons entre les quarks, nous ne prenons en compte que les contributions de termes de courte portée. C'est pourquoi nous avons essayé par la suite d'inclure l'échange de termes de moyenne et longue portée entre les quarks.

Nous avons utilisé une interaction quark-quark contenant les contributions du méson σ , de son partenaire chirale le pion et reproduisant le spectre des hadrons. Les résultats que nous avons obtenus pour les ondes S, P, D, F, G n'ont pas apporté d'améliorations par rapport à ceux obtenus précédemment comme nous aurions pu le penser. L'amélioration de certaines ondes s'accompagne de la détérioration des autres.

Pour conclure, nous pouvons dire que l'échange de gluons, des mésons σ et π entre les quarks ne suffisent pas à expliquer les déphasages KN pour les ondes S, P, D, F, G dans ce modèle de quarks constituants. Pour améliorer notre connaissance de l'interaction KN, il serait intéressant de calculer les déphasages KN à partir d'une interaction quark-quark contenant les contributions de champs mésoniques ayant des nombres quantiques différents de ceux du σ et du pion (tels que le ρ et ω) et reproduisant correctement le spectre des hadrons. Une telle étude nécessiterait avant toute chose, d'ajuster, sur le spectre des hadrons, les paramètres d'un potentiel quark-quark contenant les termes mésoniques associés au ρ et au ω avant de pouvoir l'appliquer à notre problème de diffusion.

Annexe A

Récapitulatif des noyaux intervenant dans l'équation de Hill-Wheeler

Dans cette annexe nous évaluerons les différents noyaux définis par les équations (2.82), (2.83), (2.84), (2.85). Leur utilisation dans l'équation (2.81) nous permettra d'établir les équations de diffusion (2.86) et (2.88).

A.1 Noyaux de norme

Si nous évaluons les normes directe et d'échange définies par :

$$\mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | P_{34} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \rangle \quad (\text{A.2})$$

Nous trouvons :

$$\mathcal{N}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \delta(r - r') \quad (\text{A.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(r, r', J, L; I = 0)^{(e)} = 0 \\ \mathcal{N}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \mathcal{N}_{ik;jl}(r, r', L) \\ \text{avec } \mathcal{N}_{ik;jl}(r, r', L) = \frac{32\pi^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} (-1)^L e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl}r^2 + H_{ik;jl}r'^2)} r r' \phi_L \\ \quad \quad \quad i_L(r r' | W_{ik;jl}) \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Toutes les quantités ayant $(ik; jl)$ pour indice, les $i_l(z)$, $\phi_l \dots$ seront définies dans la fin de cette annexe.

A.2 Noyaux d'énergie

L'expression des noyaux d'énergie d'échange sera différente selon la cinématique utilisée. En effet nous aurons à calculer les quantités :

$$\mathcal{H}(r, r', J, L; I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | P_{34} H_{KN} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{H}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | H_{KN} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \rangle \quad (\text{A.6})$$

avec H_{KN} le hamiltonien total du système KN défini par les équations (2.59).

A.2.1 Cinématique non relativiste

Le hamiltonien s'écrit alors :

$$H_{KN} = H_K^{int} + H_N^{int} + \frac{\vec{P}^2}{m} + V \quad (\text{A.7})$$

où H_K^{int} et H_N^{int} sont les hamiltoniens internes du kaon et du nucléon donnés par (2.13) et (2.32); V représente le potentiel d'interaction entre les quarks de clusters différents dont la forme est donnée Eq.(2.2) et Eq.(2.4).

* Les deux premiers termes du hamiltonien H_{KN} nous donnent les parties intrinsèques directes :

$$H_K^{int}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \epsilon_K \mathcal{N}^{(d)}(r, r', J, L; I) \quad (\text{A.8})$$

$$H_N^{int}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \epsilon_N \mathcal{N}^{(d)}(r, r', J, L; I) \quad (\text{A.9})$$

et si nous faisons l'approximation suivante :

$$H_N^{int}|\Psi_N\rangle = \epsilon_N|\Psi_N\rangle \quad (\text{A.10})$$

$$H_K^{int}|\Psi_K\rangle = \epsilon_K|\Psi_K\rangle \quad (\text{A.11})$$

Nous obtenons pour les parties intrinsèques d'échange :

$$H_K^{int}(r, r', J, L; I)^{(e)} = \epsilon_K \mathcal{N}^{(e)}(r, r', J, L; I) \quad (\text{A.12})$$

$$H_N^{int}(r, r', J, L; I)^{(e)} = \epsilon_N \mathcal{N}^{(e)}(r, r', J, L; I) \quad (\text{A.13})$$

* Le troisième terme de H_{KN} nous permet de déterminer le noyau d'énergie cinétique relative direct et d'échange de sorte que finalement :

$$\mathcal{H}(r, r', J, L; I)^{(d)} = \delta(r - r') \left[\epsilon_N + \epsilon_K - \frac{1}{m} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_R(r, r', J, L; I = 0)^{(e)} = 0 \\ \mathcal{K}_R(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \mathcal{E}_{ik;jl}(r, r', L) \\ \text{avec } \mathcal{E}_{ik;jl}(r, r', J, L) = \frac{(-1)^L}{m} \frac{32\pi^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl}r^2 + H_{ik;jl}r'^2)} \times \\ \quad [-G_{ik;jl}rr'(2L+3 - G_{ik;jl}r^2)\phi_L i_L(rr'|W_{ik;jl}|)] + \\ \quad W_{ik;jl}^2 r'^3 r \phi_L i_{L+2}(rr'|W_{ik;jl}|) + \\ \quad W_{ik;jl} r'^2 (2L+3 - 2G_{ik;jl}r^2)\phi_{L+1} i_{L+1}(rr'|W_{ik;jl}|) \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

* L'échange d'un gluon entre particules non colorées est interdit. De ce fait tous les noyaux d'énergie potentielle directs sont nuls.

Par contre les noyaux d'énergie potentielle d'échange, relatifs aux termes centraux et hyperfins des interactions (2.2) et (2.4), donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{34}(r', r, J, L; I = 0)^{(e)} = 0 \\ V_{34}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = -\frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [V34_{ik;jl}^{(c)}(r, r', L) + 3V34_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L)] \\ \text{avec } V34_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r', L) = \frac{(2\pi)^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} r r' e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\ (-1)^{l_1} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \phi_{l_1} i_{l_1}(r r' | W_{ik;jl} |) \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \times \\ \int_{-1}^1 V34^{(\rho)}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_{l_2}(t) dt \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{35}(r', r, J, L; I = 0)^{(e)} = 0 \\ V_{35}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [V35_{ik;jl}^{(c)}(r, r', L) - 3V35_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L)] \\ \text{avec } V35_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r', J, L) = \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B_{ik;jl} r'^2 + C_{ik;jl} r^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\ (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | F'_{ik;jl} |) \int_0^{\infty} e^{-A_{ik;jl} u^2} V35^{(\rho)}(|\beta'| u) \times \\ \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | D_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I = 0)^{(e)} = -\frac{1}{12} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V24_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L) \\ V_{24}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = \frac{1}{36} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [2V24_{ik;jl}^{(c)}(r, r', L) - V24_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L)] \\ \text{avec } V24_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r', L) = \left(\frac{\pi}{L'_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B'_{ik;jl} r'^2 + A'_{ik;jl} r^2)} \times \\ \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | D'_{ik;jl} |) \times \\ \int_0^{\infty} e^{-M'_{ik;jl} u^2} V24^{(\rho)}(|\beta''_{ik;jl}| u) \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N'_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E'_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{25}(r', r, J, L; I = 0)^{(e)} = -\frac{1}{12} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V25_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L; I) \\ V_{25}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = -\frac{1}{36} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [2V25_{ik;jl}^{(c)}(r, r', L) + V25_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L)] \\ \text{avec } V25_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r', L) = \left(\frac{\pi}{L''_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B''_{ik;jl} r'^2 + A''_{ik;jl} r^2)} \times \\ \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | D''_{ik;jl} |) \int_0^{\infty} e^{-M''_{ik;jl} u^2} \times \\ V25^{(\rho)}(|\beta'''_{ik;jl}| u) \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N''_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E''_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Nous développerons dans l'annexe C le calcul de $V_{35}(r', r, J, L; I)^{(e)}$

* La partie spin-orbite de l'interaction (2.4) nous donne les formes suivantes des noyaux spin-orbite d'échange :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{34}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = F_I^{34}(-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ L & J & L \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34}^{(ls)}(r', r, L) \\ \text{avec } V_{34}^{(ls)}(r', r, L) = \left(\frac{1}{F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)} \right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^4 (-1)^{1+L} V_{ik;jl} r^2 r'^2 \times \\ e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|l_1-L-1|}^{L+l_1+1} (-1)^{l_2} (2l_1+1)(2l_2+1) \sqrt{\frac{L(L+1)}{2L+1}} \times \\ \left(\frac{\langle l_1 0 l_2 0 | L-10 \rangle^2}{2L-1} - \frac{\langle l_1 0 l_2 0 | L+10 \rangle^2}{2L+3} \right) \phi_{l_1} i_{l_1}(rr' | W_{ik;jl}) \times \\ \int_{-1}^1 V_{34}^{(ls)}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_{l_2}(t) dt \\ \text{avec } F_{I=0}^{34} = \frac{\sqrt{6}}{9} ; F_{I=1}^{34} = -\frac{2\sqrt{6}}{27} \end{array} \right. \quad (\text{A.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = F_I^{24}(-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ L & L & J \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24}^{(ls)}(r', r, L) \\ \text{avec } V_{24}^{(ls)}(r', r, L) = \left(\frac{\pi}{F_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(A'_{ik;jl} r^2 + B'_{ik;jl} r'^2)} \times \\ \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{1+l_1+l_2+l_3} (2l_1+1)(2l_3+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_4+1)} \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\ \langle l_4 0 l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_4 0 \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \phi_{l_3} i_{l_3}(rr' | D'_{ik;jl}) \times \\ \int_0^\infty e^{-M'_{ik;jl} u^2} V_{24}^{(ls)}(|\beta''_{ik;jl}| u) \times [r H'_{ik;jl} \phi_{l_1} \phi_{l_2} i_{l_2}(ur' | N'_{ik;jl}) i_{l_1}(ur | E'_{ik;jl}) \\ - r' I'_{ik;jl} \phi_{l_2} \phi_{l_1} i_{l_1}(ur' | N'_{ik;jl}) i_{l_2}(ur | E'_{ik;jl})] u^3 du \\ \text{avec } F_{I=0}^{24} = -\frac{1}{12} ; F_{I=1}^{24} = \frac{5}{36} \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{25}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = F_I^{25}(-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ L & L & J \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{25}^{(ls)}(r', r, L) \\ \text{avec } V_{25}^{(ls)}(r', r, L) = \left(\frac{\pi}{F_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(A''_{ik;jl} r^2 + B''_{ik;jl} r'^2)} \times \\ \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{1+l_1+l_2+l_3} (2l_1+1)(2l_3+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_4+1)} \times \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \phi_{l_3} i_{l_3}(rr' | D''_{ik;jl}) \int_0^\infty e^{-M''_{ik;jl} u^2} \times \\ V_{25}^{(ls)}(|\beta'''_{ik;jl}| u) [r H''_{ik;jl} \phi_{l_1} \phi_{l_2} i_{l_2}(ur' | N''_{ik;jl}) i_{l_1}(ur | E''_{ik;jl}) - \\ r' I''_{ik;jl} \phi_{l_2} \phi_{l_1} i_{l_1}(ur' | N''_{ik;jl}) i_{l_2}(ur | E''_{ik;jl})] u^3 du \\ \text{avec } F_{I=0}^{25} = -\frac{1}{4} ; F_{I=1}^{25} = \frac{1}{12} \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

$$V_{35}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = 0 \quad (\text{A.23})$$

Le détail du calcul du noyau $V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)}$ sera effectué dans l'annexe D

* Enfin, les contributions de moyenne et longue portée venant de l'échange de champs mésoniques associés au σ et au pion donnent :

Noyaux associés au σ

* Les parties centrales des noyaux d'échange associés au champ mésonique σ calculées à partir de l'interaction (5.6) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{34}(r', r, J, L; I = 0)_S^{(e)} = 0 \\ V_{34}(r, r', J, L; I = 1)_S^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34_{ik;jl}}(r, r', L)_S \\ \text{avec } V_{34_{ik;jl}}(r, r', L)_S = \frac{(2\pi)^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} r r' e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\ (-1)^{l_1} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \phi_{l_1} i_{l_1}(r r' | W_{ik;jl} |) \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \times \\ \int_{-1}^1 V_{34}^{(\sigma,c)}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_{l_2}(t) dt \end{array} \right. \quad (\text{A.24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{35}(r', r, J, L; I = 0)_S^{(e)} = 0 \\ V_{35}(r, r', J, L; I = 1)_S^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{35_{ik;jl}}(r, r', L)_S \\ \text{avec } V_{35_{ik;jl}}(r, r', J, L)_S = \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B_{ik;jl} r'^2 + C_{ik;jl} r^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\ (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | F'_{ik;jl} |) \int_0^{\infty} e^{-A_{ik;jl} u^2} V_{35}^{(\sigma,c)}(|\beta'| u) \times \\ \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | D_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I = 0)_S^{(e)} = 0 \\ V_{24}(r, r', J, L; I = 1)_S^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24_{ik;jl}}(r, r', L)_S \\ \text{avec } V_{24_{ik;jl}}(r, r', L)_S = \left(\frac{\pi}{L'_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B'_{ik;jl} r'^2 + A'_{ik;jl} r^2)} \times \\ \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | D'_{ik;jl} |) \times \\ \int_0^{\infty} e^{-M'_{ik;jl} u^2} V_{24}^{(\sigma,c)}(|\beta''_{ik;jl}| u) \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N'_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E'_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{25}(r', r, J, L; I = 0)_S^{(e)} = 0 \\ V_{25}(r, r', J, L; I = 1)_S^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{25_{ik;jl}}(r, r', L)_S \\ \text{avec } V_{25_{ik;jl}}(r, r', L)_S = \left(\frac{\pi}{L''_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B''_{ik;jl} r'^2 + A''_{ik;jl} r^2)} \times \\ \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | D''_{ik;jl}) \int_0^{\infty} e^{-M''_{ik;jl} u^2} \times \\ V_{25}^{(\sigma,c)}(|\beta'''_{ik;jl}|u) \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N''_{ik;jl}) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E''_{ik;jl}) u^2 du \end{array} \right. \quad (\text{A.27})$$

* Les contributions venant du terme spin-orbite de l'interaction issue de la réduction non relativiste du diagramme d'échange d'un champ mésonique associé au σ entre deux quarks sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{34}(r', r, J, L; I)_{S;ls}^{(e)} = F_I^{34} (-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ L & J & L \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34_{ik;jl}}^{(ls)}(r', r, L)_S \\ \text{avec } V_{34_{ik;jl}}^{(ls)}(r', r, L)_S = \left(\frac{1}{F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)} \right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^4 (-1)^{1+L} V_{ik;jl} r^2 r'^2 \times \\ e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|l_1-L-1|}^{L+l_1+1} (-1)^{l_2} (2l_1+1)(2l_2+1) \sqrt{\frac{L(L+1)}{2L+1}} \times \\ \left(\frac{\langle l_1 0 l_2 0 | L-10 \rangle^2}{2L-1} - \frac{\langle l_1 0 l_2 0 | L+10 \rangle^2}{2L+3} \right) \phi_{l_1} i_{l_1}(r r' | W_{ik;jl}) \times \\ \int_{-1}^1 V_{34}^{(\sigma,ls)}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_2(t) dt \\ \text{avec } F_{I=0}^{34} = -\frac{\sqrt{6}}{9} ; F_{I=1}^{34} = \frac{2\sqrt{6}}{27} \end{array} \right. \quad (\text{A.28})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I)_{S;ls}^{(e)} = F_I^{24} (-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ L & L & J \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24_{ik;jl}}^{(ls)}(r', r, L)_S \\ \text{avec } V_{24_{ik;jl}}^{(ls)}(r', r, L)_S = \left(\frac{\pi}{L'_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(A'_{ik;jl} r^2 + B'_{ik;jl} r'^2)} \times \\ \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{1+l_1+l_2+l_3} (2l_1+1)(2l_3+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_4+1)} \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\ \langle l_4 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_4 0 \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \phi_{l_3} i_{l_3}(r r' | D'_{ik;jl}) \times \\ \int_0^{\infty} e^{-M'_{ik;jl} u^2} V_{24}^{(\sigma,ls)}(|\beta''_{ik;jl}|u) \times [r H'_{ik;jl} \phi_{l_1} \phi_{l_2} i_{l_2}(u r' | N'_{ik;jl}) i_{l_1}(u r | E'_{ik;jl}) \\ - r' I'_{ik;jl} \phi_{l_2} \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N'_{ik;jl}) i_{l_2}(u r | E'_{ik;jl})] u^3 du \\ \text{avec } F_{I=0}^{24} = -\frac{1}{6} ; F_{I=1}^{24} = \frac{10}{36} \end{array} \right. \quad (\text{A.29})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{25}(r', r, J, L; I)_{S;ls}^{(e)} = F_I^{25}(-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ L & L & J \end{array} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{25}^{(ls)}(r', r, L)_S \\ \text{avec } V_{25}^{(ls)}(r', r, L)_S = \left(\frac{\pi}{L''_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(A''_{ik;jl} r^2 + B''_{ik;jl} r'^2)} \times \\ \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{1+l_1+l_2+l_3} (2l_1+1)(2l_3+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_4+1)} \times \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_4 \end{array} \right\} \phi_{l_3} i_{l_3}(r r' | D''_{ik;jl}) \int_0^\infty e^{-M''_{ik;jl} u^2} \times \\ V_{25}^{(\sigma, ls)}(|\beta'''_{ik;jl}| u) [r H''_{ik;jl} \phi_{l_1} \phi_{l_2} i_{l_2}(u r' | N''_{ik;jl}) i_{l_1}(u r | E''_{ik;jl}) - \\ r' I''_{ik;jl} \phi_{l_2} \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N''_{ik;jl}) i_{l_2}(u r | E''_{ik;jl})] u^3 du \\ \text{avec } F_{I=0}^{25} = \frac{1}{2} ; F_{I=1}^{25} = -\frac{1}{6} \end{array} \right. \quad (A.30)$$

$$V_{35}(r', r, J, L; I)_{S;ls}^{(e)} = 0 \quad (A.31)$$

* Les noyaux directs associés au champ mésonique du σ intervenant dans l'équation de Hill-Wheeler (5.9) sont calculés grâce à (5.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I=0)_S^{(d),(c)} = V_{24}(r', r, J, L; I=1)_S^{(d),(c)} = \\ - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{S_{1ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi \sqrt{\pi} e^{-S_{4ik;jl} r^2}}{r \sqrt{S_{2ik;jl}}} C_\sigma \frac{\delta(r-r')}{|S_{3ik;jl}|} \times \\ \left\{ \frac{1}{m_\sigma} \exp \left(\frac{(m_\sigma + |S_{3ik;jl}| r)^2}{4 |S_{2ik;jl}|} \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{(m_\sigma + |S_{3ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{2ik;jl}|}} \right) \right] + \right. \\ C'_\sigma \frac{1}{\Lambda_1} \exp \left(\frac{(\Lambda_1 + |S_{3ik;jl}| r)^2}{4 |S_{2ik;jl}|} \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{(\Lambda_1 + |S_{3ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{2ik;jl}|}} \right) \right] \\ \left. - \frac{1}{m_\sigma} \exp \left(\frac{(m_\sigma - |S_{3ik;jl}| r)^2}{4 |S_{2ik;jl}|} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{(-m_\sigma + |S_{3ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{2ik;jl}|}} \right) \right] - \right. \\ \left. C'_\sigma \frac{1}{\Lambda_1} \exp \left(\frac{(\Lambda_1 - |S_{3ik;jl}| r)^2}{4 |S_{2ik;jl}|} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{(-\Lambda_1 + |S_{3ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{2ik;jl}|}} \right) \right] \right\} \end{array} \right. \quad (A.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{25}(r', r, J, L; I=0)_S^{(d),(c)} = V_{25}(r', r, J, L; I=1)_S^{(d),(c)} = \\ - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{S_{5ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi \sqrt{\pi} e^{-S_{6ik;jl} r^2}}{r \sqrt{S_{7ik;jl}}} C_\sigma \frac{\delta(r-r')}{|S_{8ik;jl}|} \times \\ \left\{ \frac{1}{m_\sigma} \exp \left(\frac{(m_\sigma + |S_{8ik;jl}| r)^2}{4 |S_{7ik;jl}|} \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{(m_\sigma + |S_{8ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{7ik;jl}|}} \right) \right] + \right. \\ C'_\sigma \frac{1}{\Lambda_1} \exp \left(\frac{(\Lambda_1 + |S_{8ik;jl}| r)^2}{4 |S_{7ik;jl}|} \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{(\Lambda_1 + |S_{8ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{7ik;jl}|}} \right) \right] \\ \left. - \frac{1}{m_\sigma} \exp \left(\frac{(m_\sigma - |S_{8ik;jl}| r)^2}{4 |S_{7ik;jl}|} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{(-m_\sigma + |S_{8ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{7ik;jl}|}} \right) \right] - \right. \\ \left. C'_\sigma \frac{1}{\Lambda_1} \exp \left(\frac{(\Lambda_1 - |S_{8ik;jl}| r)^2}{4 |S_{7ik;jl}|} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{(-\Lambda_1 + |S_{8ik;jl}| r)}{2 \sqrt{|S_{7ik;jl}|}} \right) \right] \right\} \end{array} \right. \quad (A.33)$$

où

$$VIJ^{(\sigma,c)}(x) = C_\sigma \left(\frac{e^{-m_\sigma x}}{m_\sigma x} + C'_\sigma \frac{e^{-\Lambda_1 x}}{\Lambda_1 x} \right)$$

$$VIJ^{\sigma,ls}(x) = C_\sigma \frac{m_\sigma^2}{4m^2} \left(G(m_\sigma x) - \frac{\Lambda_1^3}{m_\sigma^3} G(\Lambda_1 x) \right)$$

et

$$C_\sigma = -\alpha_{ch} \frac{4m^2}{m_\pi^2} \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - m_\sigma^2} m_\sigma$$

$$C'_\sigma = -\frac{\Lambda_1}{m_\sigma}$$

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad ; \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) Y(x)$$

Les valeurs des constantes α_{ch} , m , m_π , m , σ et Λ_1 sont données dans le chapitre 5.

Noyaux associés au Pion

* Les noyaux d'échange obtenus à partir du champ mésonique associé au pion (5.7) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{34}(r', r, J, L; I = 0)_{PS}^{(e)} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} \\ V_{34}(r, r', J, L; I = 1)_{PS}^{(e)} = \frac{2}{3} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} \\ \text{avec } V_{34_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} = \frac{(2\pi)^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} r r' e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\ (-1)^{l_1} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \phi_{l_1} i_{l_1}(r r' | W_{ik;jl} |) \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \times \\ \int_{-1}^1 V_{PS34}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_2(t) dt \end{array} \right. \quad (A.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{24}(r', r, J, L; I = 0)_{PS}^{(e)} = \frac{1}{3} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} \\ V_{24}(r, r', J, L; I = 1)_{PS}^{(e)} = \frac{4}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} \\ \text{avec } V_{24_{ik;jl}}(r, r', L)_{PS} = \left(\frac{\pi}{F'_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(B'_{ik;jl} r'^2 + A'_{ik;jl} r^2)} \times \\ \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} (-1)^{l_2} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \phi_{l_2} i_{l_2}(r r' | D'_{ik;jl} |) \times \\ \int_0^{\infty} e^{-M'_{ik;jl} u^2} V_{PS24}(|\beta''_{ik;jl}| u) \phi_{l_1} i_{l_1}(u r' | N'_{ik;jl} |) \phi'_{l_1} i_{l_1}(u r | E'_{ik;jl} |) u^2 du \end{array} \right. \quad (A.35)$$

où

$$V_{PS} IJ(x) = C_\pi \left(\frac{e^{-m_\pi x}}{m_\pi x} + C'_\pi \frac{e^{-\Lambda_1 x}}{\Lambda_1 x} \right)$$

et

$$C_\pi = \frac{1}{3} \alpha_{ch} \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 - m_\pi^2} m_\pi$$

$$C'_\pi = -\frac{\Lambda_1^3}{m_\pi^3}$$

A.2.2 Cinématique relativiste

Dans ce cas le hamiltonien s'écrit :

$$H_{KN} = H_K^{int} + H_N^{int} + V$$

où

$$H_K^{int} = T_4 + T_5 + V_{45} \left(\left(\sqrt{\frac{1+\omega}{2\omega}} z \right) \right)$$

$$H_N^{int} = T_1 + T_2 + T_3 + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ + V_{13}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{23}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|)$$

avec $T_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} - m$, $T_2 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} - m$, $T_3 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2} - m$, $T_4 = \sqrt{\vec{p}_4^2 + m^2} - m$, $T_5 = \sqrt{\vec{p}_5^2 + (\omega m)^2} - \omega m$

et V est le potentiel interquark (2.2) entre quarks de clusters différents.

Nous nous sommes intéressé, dans le cadre de cette cinématique relativiste, à la diffusion KN pour un état de moment angulaire relatif nul.

Les noyaux d'énergie potentielle obtenus à partir de V sont les mêmes que ceux donnés précédemment en posant $L = 0$. L'évaluation des noyaux d'énergie interne d'échange donne :

* Pour l'énergie cinétique d'échange :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(r, r', I = 0)^{(e)} = T_2(r, r', I = 0)^{(e)} = 0 \\ T_1(r, r', I = 1)^{(e)} = T_2(r, r', I = 0)^{(e)} = - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{8\pi}{9} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \times \\ \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{T_{A1_{ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{B1_{ik;jl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'^2}{4T_{A1_{ik;jl}}}} \sqrt{\frac{\pi}{T_{C1_{ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{D1_{ik;jl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'^2}{16T_{A1_{ik;jl}}^2 T_{C1_{ik;jl}}}} \times \\ \int_0^\infty dV e^{-T_{E1_{ik;jl}} \vec{V}^2} sh \left(iT_{F1_{ik;jl}} V \right) \int_0^\infty dP e^{-T_{G1_{ik;jl}} \vec{P}^2} sh(iP r) \times \\ \left[-\frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}}} V P e^{-T_{H1_{ik;jl}} V P} + \frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}}} e^{-T_{H1_{ik;jl}} V P} + \right. \\ \left. \frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}}} V P e^{T_{H1_{ik;jl}} V P} - \frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}}} e^{T_{H1_{ik;jl}} V P} + \mathcal{I}_{ik;jl} \right] \end{array} \right. \quad (A.36)$$

Avec deux cas possibles :

Si $\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}} > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ik;jl} = & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}}T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}}}VP\sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}\right) - \\ & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}}T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}}}VP\sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}\right) \end{aligned}$$

Si $\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}} < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ik;jl} = & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}}T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}}}VP\sqrt{-\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}\right) - \\ & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}}T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}}}VP\sqrt{-\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}\right) \end{aligned}$$

Avec

$$\alpha_{1_{ik;jl}} = 1 + \frac{1}{m^2 T_{D1_{ik;jl}}^2} \left(\vec{V}^2 + T_{J1_{ik;jl}}^2 \vec{P}^2 \right) \quad (\text{A.37})$$

et

$$\beta_{1_{ik;jl}} = -\frac{2T_{J1_{ik;jl}}^2}{m^2 T_{D1_{ik;jl}}^2} \quad (\text{A.38})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3(r, r', I = 0)^{(e)} = 0 \\ T_3(r, r', I = 1)^{(e)} = -\sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{16\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \times \\ \sqrt{\frac{\pi}{T_{A1_{ik;jl}}}} \left(\frac{\pi}{T_{A3_{ik;jl}}} \right)^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\pi}{T_{B3_{ik;jl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'^2}{4T_{A1_{ik;jl}}}} \int_0^\infty dP e^{-T_{C3_{ik;jl}} \vec{P}^2} sh(iPr) \int_0^\infty dW \times \\ e^{-T_{D3_{ik;jl}} \vec{W}^2} sh\left(i\frac{r'}{2T_{A1_{ik;jl}}}W\right) \left[-\frac{2\pi}{T_{E3_{ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{3_{ik;jl}} + \beta_{3_{ik;jl}}} WP e^{-T_{E3_{ik;jl}} WP} + \right. \\ \left. \frac{2\pi}{T_{E3_{ik;jl}}} e^{-T_{E3_{ik;jl}} WP} + \frac{2\pi}{T_{E3_{ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{3_{ik;jl}} - \beta_{3_{ik;jl}}} WP e^{T_{E3_{ik;jl}} WP} - \frac{2\pi}{T_{E3_{ik;jl}}} e^{T_{E3_{ik;jl}} WP} + \mathcal{I}_{ij;kl} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.39})$$

Avec deux cas possibles :

$$\text{Si } \frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}} > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{E_{3ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{3ik;jl} T_{F_{ik;jl}}'''}{\beta_{3ik;jl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{3ik;jl} + \beta_{3ik;jl}} WP \sqrt{\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}\right) - \\ & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{E_{3ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{3ik;jl} T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{3ik;jl} - \beta_{3ik;jl}} WP \sqrt{\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}} < 0 :$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{E_{3ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{3ik;jl} T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{3ik;jl} + \beta_{3ik;jl}} WP \sqrt{-\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}\right) - \\ & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{E_{3ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{3ik;jl} T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{3ik;jl} - \beta_{3ik;jl}} WP \sqrt{-\frac{T_{E_{3ik;jl}}}{\beta_{3ik;jl}}}\right) \end{aligned}$$

Avec

$$\alpha_{3ik;jl} = 1 + \frac{1}{m^2 T_{F_{3ik;jl}}^2} \left(\vec{W}^2 + T_{G_{3ik;jl}}^2 \vec{P}^2 \right) \quad (\text{A.40})$$

et

$$\beta_{3ik;jl} = -\frac{2T_{G_{3ik;jl}}}{m^2 T_{F_{3ik;jl}}} \quad (\text{A.41})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_4(r, r', I = 0)^{(e)} = 0 \\ T_4(r, r', I = 1)^{(e)} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} -a_i a_j c_k c_l \frac{2}{9} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\omega}}{\sqrt{4+\omega}} \right)^3 \left(\frac{\pi}{T_{A_{4ik;jl}}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \\ \sqrt{\frac{\pi}{T_{B_{4ik;jl}}}} e^{-\frac{r'^2}{4T_{B_{4ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{C_{4ik;jl}}} \right|^3 \int_0^\infty dW e^{-T_{D_{4ik;jl}} \vec{W}^2} sh\left(i \frac{r' W}{2T_{B_{4ik;jl}}}\right) \int_0^\infty dP \times \\ e^{-T_{E_{4ik;jl}} \vec{P}^2} sh(i \operatorname{Pr}) \left[-\frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{4ij;kl} + \beta_{4ij;kl}} WP e^{-T_{F_{4ik;jl}} WP} + \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} e^{-T_{F_{4ik;jl}} WP} \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{4ij;kl} - \beta_{4ij;kl}} WP e^{T_{F_{4ik;jl}} WP} - \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} e^{T_{F_{4ik;jl}} WP} + \mathcal{I}_{ij;kl} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.42})$$

Avec deux cas possibles :

$$\text{Si } \frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}} > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{4ij;kl} T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{4ij;kl} + \beta_{4ij;kl}} WP \sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}\right) - \\ & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{4ij;kl} T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{4ij;kl} - \beta_{4ij;kl}} WP \sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}} < 0 :$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{4ij;kl} T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{4ij;kl} + \beta_{4ij;kl}} WP \sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}\right) - \\ & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{4ij;kl} T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{4ij;kl} - \beta_{4ij;kl}} WP \sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{4ij;kl}}}\right) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \alpha_{4ij;kl} = & 1 + \frac{1}{m^2} \left[\frac{2\omega}{1+\omega} \frac{1}{T_{G_{4ik;jl}}^2} \vec{W}^2 + \left(\frac{2\omega}{1+\omega} \frac{T_{H_{4ik;jl}}^2}{T_{G_{4ik;jl}}^2} + \frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} \sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} \frac{T_{H_{4ik;jl}}}{T_{G_{4ik;jl}}} \right) \vec{P}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

et

$$\beta_{4ij;kl} = -\frac{1}{m^2} \left(\frac{4\omega}{1+\omega} \frac{T_{H_{4ik;jl}}}{T_{G_{4ik;jl}}^2} + 2\sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} \sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} \frac{1}{T_{G_{4ik;jl}}} \right) \quad (\text{A.44})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_5(r, r', I=0)^{(e)} = 0 \\ T_5(r, r', I=1)^{(e)} = -\sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{2}{9} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} \omega m \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\omega}}{\sqrt{4+\omega}} \right)^3 \left(\frac{\pi}{T_{A_{3ik;jl}}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \\ \sqrt{\frac{\pi}{T_{B_{4ik;jl}}}} e^{-\frac{r'^2}{4T_{B_{4ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{C_{4ik;jl}}} \right|^3 \int_0^\infty dW e^{-T_{D_{4ik;jl}} \vec{W}^2} sh\left(i \frac{r' W}{2T_{B_{4ik;jl}}}\right) \int_0^\infty dP e^{-T_{E_{4ik;jl}} \vec{P}^2} \times \\ sh(i \operatorname{Pr}) \left[-\frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{5ij;kl} + \beta_{5ij;kl}} WP e^{-T_{F_{4ik;jl}} WP} + \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} e^{-T_{F_{4ik;jl}} WP} + \right. \\ \left. \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{5ij;kl} - \beta_{5ij;kl}} WP e^{T_{F_{4ik;jl}} WP} - \frac{2\pi}{T_{F_{4ik;jl}}} e^{T_{F_{4ik;jl}} WP} + \mathcal{I}_{ij;kl} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.45})$$

Avec deux cas possibles :

$$\text{Si } \frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}} > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{5ij;kl}T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{5ij;kl} + \beta_{5ij;kl}} WP \sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}\right) - \\ & \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{5ij;kl}T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha_{5ij;kl} - \beta_{5ij;kl}} WP \sqrt{\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}} < 0 :$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij;kl} = & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{5ij;kl}T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{5ij;kl} + \beta_{5ij;kl}} WP \sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}\right) - \\ & i \frac{\pi\sqrt{\pi}}{T_{F_{4ik;jl}}\sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}} e^{\frac{\alpha_{5ij;kl}T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}} \operatorname{erf}\left(-i\sqrt{\alpha_{5ij;kl} - \beta_{5ij;kl}} WP \sqrt{-\frac{T_{F_{4ik;jl}}}{\beta_{5ij;kl}}}\right) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \alpha_{5ij;kl} = & 1 + \frac{1}{(\omega m)^2} \left[\frac{2\omega}{(1+\omega)} \frac{1}{T_{G_{4ik;jl}}^2} \vec{W}^2 + \left(\frac{2\omega}{1+\omega} \frac{T_{H_{5ik;jl}}^2}{T_{G_{4ik;jl}}^2} + \frac{6\omega^2}{(1+\omega)(4+\omega)} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2\omega \sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} \sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} \frac{T_{H_{4ik;jl}}}{T_{G_{4ik;jl}}} \right) \vec{P}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\beta_{5ij;kl} = -\frac{1}{(\omega m)^2} \left(\frac{4\omega}{1+\omega} \frac{T_{H_{4ik;jl}}}{T_{G_{4ik;jl}}^2} - 2\omega \sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} \sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} \frac{1}{T_{G_{4ik;jl}}} \right) \quad (\text{A.47})$$

* Pour l'énergie potentielle d'échange nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{12}(r', r, I=0)^{(e)} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{34}^{(\sigma)}_{ik;jl}(r, r') \\ V_{12}(r, r', I=1)^{(e)} = \frac{1}{3} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [V_{12}^{(c)}_{ik;jl}(r, r') - 2V_{12}^{(\sigma)}_{ik;jl}(r, r')] \\ \text{avec } V_{12}^{(c)}_{ik;jl}(r, r') = \frac{1}{6} \frac{4\pi}{W_{ik;jl}} \left(\frac{2\pi}{F_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl}r^2 + H_{ik;jl}r'^2)} \times \\ sh(W_{ik;jl}rr') \left[-\frac{4\pi\chi}{\alpha_i + \alpha_j} + \frac{8\pi\lambda}{(\alpha_i + \alpha_j)^2} - \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} D \right] \\ \text{et } V_{12}^{(\sigma)}_{ik;jl}(r, r') = \frac{2\chi'}{3\sqrt{\pi m^2}} \left[\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j + \frac{2}{A(2\mu) - B}} \right]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{A.48})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
V_{45}(r', r, I = 0)^{(e)} = 0 \\
V_{45}(r, r', I = 1)^{(e)} = \frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [V_{45}_{ik;jl}^{(c)}(r, r') - 3V_{45}_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r')] \\
\text{avec } V_{45}_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r') = \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi^2}{|A_{1ik;jl}|} r e^{-\left(B_{1ik;jl} - \frac{C_{1ik;jl} D_{1ik;jl}}{2A_{1ik;jl}} \right) r^2} \times \\
e^{-\left(E_{1ik;jl} - \frac{C_{1ik;jl} A_{1ik;jl}}{2D_{1ik;jl}} \right) r'^2} \int_0^\infty du u e^{-F_{1ik;jl} \vec{u}^2} V_{45}^{(\rho)}(|\beta_1| u) \times \\
\int_{p_1(r, r')}^{p_2(r, r')} dpe^{-\frac{C_{1ik;jl} D_{1ik;jl}}{2A_{1ik;jl}} \vec{p}^2} sh(D_{1ik;jl} up) \\
\text{où} \\
\text{Si } D_{1ik;jl} \times A_{1ik;jl} > 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \frac{A_{1ik;jl}}{D_{1ik;jl}} r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \frac{A_{1ik;jl}}{D_{1ik;jl}} r' \\
\text{Si } D_{1ik;jl} \times A_{1ik;jl} < 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \left| \frac{A_{1ik;jl}}{D_{1ik;jl}} \right| r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \left| \frac{A_{1ik;jl}}{D_{1ik;jl}} \right| r'
\end{array} \right. \quad (A.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
V_{13}(r', r, I = 0)^{(e)} = -\frac{1}{12} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{13}_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r') \\
V_{13}(r, r', I = 1)^{(e)} = \frac{1}{36} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [2V_{13}_{ik;jl}^{(c)}(r, r') - V_{13}_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r')] \\
\text{avec } V_{13}_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r') = \left(\frac{\pi}{A_{2ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi^2}{|B_{2ik;jl}|^2} e^{-\left(C_{2ik;jl} - \frac{D_{2ik;jl} E_{2ik;jl}}{2B_{2ik;jl}} \right) r^2} \times \\
e^{-\left(F_{2ik;jl} - \frac{E_{2ik;jl} B_{2ik;jl}}{2D_{2ik;jl}} \right) r'^2} \int du u e^{-G_{2ik;jl} \vec{u}^2} V_{13}^{(\rho)}(|\beta_{2ik;jl}| u) \times \\
\int_{p_1(r, r')}^{p_2(r, r')} dpe^{-\frac{D_{2ik;jl} E_{2ik;jl}}{2B_{2ik;jl}} \vec{p}^2} sh(D_{2ik;jl} up) \\
\text{où} \\
\text{Si } B_{2ik;jl} \times D_{2ik;jl} > 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \frac{B_{2ik;jl}}{D_{2ik;jl}} r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \frac{B_{2ik;jl}}{D_{2ik;jl}} r' \\
\text{Si } B_{2ik;jl} \times D_{2ik;jl} < 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \left| \frac{B_{2ik;jl}}{D_{2ik;jl}} \right| r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \left| \frac{B_{2ik;jl}}{D_{2ik;jl}} \right| r'
\end{array} \right. \quad (A.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
V_{23}(r', r, I = 0)^{(e)} = -\frac{1}{12} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{23}^{(\sigma)}(r, r') \\
V_{23}(r, r', I = 1)^{(e)} = \frac{1}{36} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [2V_{23}^{(c)}(r, r') - V_{23}^{(\sigma)}(r, r')] \\
\text{avec } V_{23}^{(\rho)}(r, r') = \left(\frac{\pi}{A_{3ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{8\pi^2}{|B_{3ik;jl}|^2} e^{-\left(C_{3ik;jl} - \frac{D_{3ik;jl} E_{3ik;jl}}{2B_{3ik;jl}} \right) r^2} \times \\
e^{-\left(F_{3ik;jl} - \frac{E_{3ik;jl} B_{3ik;jl}}{2D_{3ik;jl}} \right) r'^2} \int du u e^{-G_{3ik;jl} \bar{u}^2} V_{23}^{(\rho)}(|\beta_{3ik;jl}| u) \times \\
\int_{p_1(r, r')}^{p_2(r, r')} dpe^{-\frac{D_{3ik;jl} E_{3ik;jl}}{2B_{3ik;jl}} \bar{p}^2} sh(D_{3ik;jl} up) \\
p_1(r, r') \\
\text{où} \\
\text{Si } B_{3ik;jl} \times D_{3ik;jl} > 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \frac{B_{3ik;jl}}{D_{3ik;jl}} r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \frac{B_{3ik;jl}}{D_{3ik;jl}} r' \\
\text{Si } B_{3ik;jl} \times D_{3ik;jl} < 0 \\
p_1(r, r') = \left| r - \left| \frac{B_{3ik;jl}}{D_{3ik;jl}} \right| r' \right| \quad ; \quad p_2(r, r') = r + \left| \frac{B_{3ik;jl}}{D_{3ik;jl}} \right| r'
\end{array} \right. \quad (A.51)$$

La démarche menant au résultat du calcul de $T_1(r, r')^{(e)}$ sera donnée dans l'annexe B. Toutes les quantités ayant $(ik; jl)$ pour indice sont des constantes qui dépendent de $\alpha_i, \alpha_j, \gamma_k, \gamma_l$ et peuvent être fournies sur demande; $P_L(t)$ sont les fonctions de Legendre de 1^{ère} espèce; $i_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{l+\frac{1}{2}}(z)$ sont les fonctions de Bessel sphériques modifiées définies avec un argument positif. Dans chacune des expressions ci-dessus, l'argument de ces fonctions est du type $C_{ik;jl} z z'$. Par conséquent, il faut rester très vigilant quant au signe de $C_{ik;jl} z z'$; ceci explique la présence de termes de phase $\phi_l = \left(\frac{|C_{ik;jl}|}{C_{ik;jl}} \right)^l$ dans les noyaux contenant des fonctions $i_l(|C_{ik;jl}| z z')$.

Annexe B

Calcul d'un noyau d'énergie cinétique relativiste d'échange

L'équation de Salpeter (2.86) fait intervenir, via les hamiltoniens intrinsèques de chaque particule (2.14) et (2.33), les noyaux d'énergie cinétique suivant :

$$T(r, r', I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | P_{34} T | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (\text{B.1})$$

avec

$$T = \frac{\sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_4^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_5^2 + (\omega m)^2} - (4 + \omega)m}{\sqrt{\vec{p}_5^2 + (\omega m)^2} - (4 + \omega)m} \quad (\text{B.2})$$

Dans cette annexe, nous allons effectuer le calcul d'un de ces noyaux pour les deux canaux d'isospin ($I = 0, 1$) et pour une fonction d'onde relative $h(r)$ dans un état s. Nous étudierons par exemple :

$$T_1(r, r', I)^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) | P_{34} \left(\sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} - m \right) | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (\text{B.3})$$

Les contributions dues à la couleur, au spin et à l'isospin sont identiques aux valeurs trouvées pour le noyau de norme d'échange $\mathcal{N}(r, r', L; I)^{(e)}$. Nous ne détaillerons donc pas les étapes de calcul, vu qu'elles ont déjà été déterminées par le passé [54, 57], et nous donnerons directement les résultats :

$$\langle C(1, 2, 3)C(4, 5) | P_{34} | C(1, 2, 3)C(4, 5) \rangle = \frac{1}{3} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} & \langle [\chi(1, 2, 3)\eta(1, 2, 3)] \chi(4, 5)\eta(4, 5) | P_{34} | [\chi(1, 2, 3)\eta(1, 2, 3)] \chi(4, 5)\eta(4, 5) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{matrix} \right\} = \mathfrak{I}(I) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\mathfrak{I}(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } I = 1 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur le calcul de la partie espace de l'élément de matrice défini par (B.1).

La forme de l'énergie cinétique des quarks de notre système (B.2) nous pousse naturellement à travailler dans l'espace des impulsions. Il faudra donner la représentation des deux fonctions d'onde, qui interviennent dans le calcul de l'élément de matrice $T_1(r, r', I)^{(e)}$, dans cet espace. Ainsi, à partir des deux fonctions d'onde suivantes définies dans l'espace des coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r) \\ \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}', r') = P_{34} \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r') \end{array} \right. \quad (B.7)$$

Nous déduirons leur représentation dans l'espace des impulsions :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{p}, \vec{q}', \vec{u}', \vec{P}', r') &= \left\langle \vec{p}, \vec{q}', \vec{u}', \vec{P}' \left| \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \right. \right\rangle \\ &= \int d^3x d^3y' d^3z' d^3R' \left\langle \vec{p}, \vec{q}', \vec{u}', \vec{P}' \left| \vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}' \right. \right\rangle \times \\ &\quad \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}', r') \\ &= \int d^3x d^3y' d^3z' d^3R' \frac{1}{(2\pi)^6} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{q}' \cdot \vec{y}'} e^{-i\vec{u}' \cdot \vec{z}'} e^{-i\vec{P}' \cdot \vec{R}'} \times \\ &\quad \phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}', r') \end{aligned} \quad (B.8)$$

où $\vec{p}, \vec{q}', \vec{u}', \vec{P}'$ sont définies comme les impulsions associées aux coordonnées de Jacobi "tournées" $\vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}'$.

avec

$$\begin{aligned} &\phi(1, 2, 3, 4, 5, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}, r') \\ &= C(1, 2, 4)C(3, 5) \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi'_0 \eta'_0 + \chi'_1 \eta'_1] \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times \end{aligned} \quad (B.9)$$

$$\chi(3, 5)\eta(3, 5) e^{-\frac{\alpha_i}{2}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2)} e^{-\frac{\gamma_k}{2}\vec{z}^2} \frac{\delta(R' - r')}{R'} \quad (B.10)$$

et

$$\int d^3R' e^{-i\vec{P}' \cdot \vec{R}'} \frac{\delta(R' - r')}{R'} = \int dR' \delta(R' - r') \frac{4\pi}{iP'R'^2} sh(iP'r') \quad (B.11)$$

Par conséquent, dans cet espace des impulsions, la fonction d'onde totale du système KN après application de l'opérateur P_{34} s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{p}, \vec{q}', \vec{u}', \vec{P}', r') &= C(1, 2, 4)C(3, 5) \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi'_0 \eta'_0 + \chi'_1 \eta'_1] \times \\ &\quad \chi(3, 5)\eta(3, 5) \frac{1}{\alpha_i^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\gamma_k} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times \\ &\quad e^{-\frac{1}{2\alpha_i}(\vec{p}^2 + \vec{q}'^2)} e^{-\frac{1}{2\gamma_k}\vec{u}'^2} \frac{4\pi}{iP'} sh(iP'r') \end{aligned} \quad (B.12)$$

De la même façon, nous obtenons pour la fonction d'onde "non tournée" :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(1, 2, 3, 4, 5, \vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{P}, r) &= C(1, 2, 3)C(4, 5)\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_0\eta_0 + \chi_1\eta_1] \times \\ &\chi(4, 5)\eta(4, 5)\frac{1}{\alpha_j^3}\left(\frac{1}{\gamma_l}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \times \\ &\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{2\alpha_j}(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)}e^{-\frac{1}{2\gamma_l}\vec{u}^2}\frac{4\pi}{iP}sh(iPr) \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

La partie espace de (B.3) devient :

$$\begin{aligned} T_1(r, r')^{(e)} &= -\sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j}\right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l}\right)^{\frac{3}{2}} m \\ &\int d^3p d^3q d^3u d^3P e^{-\frac{1}{2\alpha_i}(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)} e^{-\frac{1}{2\gamma_k}\vec{u}^2} \frac{sh(iP'r')}{P'} \\ &\left(\sqrt{1 + \frac{\vec{p}_1^2}{m^2}} - 1\right) e^{-\frac{1}{2\alpha_j}(\vec{p}^2 + \vec{q}^2)} e^{-\frac{1}{2\gamma_l}\vec{u}^2} \frac{sh(iPr)}{P} \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

A partir des impulsions de Jacobi données (2.53, 2.54, 2.55, 2.56, 2.57), nous montrons que :

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \\ \vec{p}_4 \\ \vec{p}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} & \frac{1}{4+\omega} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} & \frac{1}{4+\omega} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} & \frac{1}{4+\omega} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} & -\sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} & \frac{1}{4+\omega} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2\omega}{1+\omega}} & -\omega\sqrt{\frac{6}{(1+\omega)(4+\omega)}} & \frac{1}{4+\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{u} \\ \vec{P} \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{u} \\ \vec{P} \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega}{\sqrt{2\omega(1+\omega)}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2\omega(1+\omega)}} \\ \frac{(\omega+1)}{\sqrt{6(\omega+1)(\omega+4)}} & \frac{(\omega+1)}{\sqrt{6(\omega+1)(\omega+4)}} & -3 & \frac{(\omega+1)}{\sqrt{6(\omega+1)(\omega+4)}} & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \\ \vec{p}_4 \\ \vec{p}_5 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Dès lors, en se plaçant dans le référentiel du centre de masse du système KN ($\vec{P} = \vec{0}$), nous trouvons que les coordonnées $\vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{P}$ s'expriment en fonction des impulsions $\vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{P}$ et :

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{\vec{q}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} \vec{P} \quad (\text{B.17})$$

Le noyau $T_1(r, r')^{(e)}$ devient alors :

$$\begin{aligned}
T_1(r, r')^{(e)} = & - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \times \\
& \int d^3 p d^3 q d^3 u d^3 P e^{-T_{A_{ij};kl} \vec{p}^2 - T_{B_{ij};kl} \vec{q}^2 - T_{C_{ij};kl} \vec{u}^2 - T_{D_{ij};kl} \vec{P}^2} \times \\
& e^{-T_{E_{ik;jl}} \vec{q} \cdot \vec{u} - T_{F_{ik;jl}} \vec{q} \cdot \vec{P} - T_{G_{ik;jl}} \vec{u} \cdot \vec{P}} \frac{sh(iP'r')}{P'} \frac{sh(iPr)}{P} \times \\
& \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} \vec{P} \right)^2} - 1 \right) \quad (B.18)
\end{aligned}$$

où toutes les quantités ayant pour indice $(ij;kl)$ sont des constantes qui ne dépendent que de $\alpha_i, \alpha_j, \gamma_k \gamma_l$. Le changement de variable $\vec{u} \rightarrow \vec{P}'$ défini par :

$$\vec{P}' = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(4+\omega)}{1+\omega}} \vec{q} + \frac{\sqrt{\omega(4+\omega)}}{\sqrt{3}(1+\omega)} \vec{u} + \frac{1}{3} \frac{2\omega-1}{1+\omega} \vec{P} \quad (B.19)$$

impose,

$$d^3 u = \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 d^3 P' \quad (B.20)$$

De sorte que l'élément de matrice $T_1(r, r')^{(e)}$ s'écrive :

$$\begin{aligned}
T_1(r, r')^{(e)} = & - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l 4\pi \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \\
& \int d^3 p d^3 q d^3 P' d^3 P e^{-T_{A_{ij};kl} \vec{p}^2 - T_{B'_{ij};kl} \vec{q}^2 - T_{A'_{ij};kl} \vec{P}'^2 - T_{D'_{ij};kl} \vec{P}^2} \times \\
& e^{-T_{E'_{ik;jl}} \vec{q} \cdot \vec{P} - T_{B'_{1ij};kl} \vec{q} \cdot \vec{P} - T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} \cdot \vec{P}} \frac{sh(iP'r')}{P'} \frac{sh(iPr)}{P} \times \\
& \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2(1+\omega)}{3(4+\omega)}} \vec{P} \right)^2} - 1 \right) \quad (B.21)
\end{aligned}$$

Le changement de variable $\vec{P} \rightarrow \vec{P}'$ défini à partir de (B.15) et le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
& \int d^3 P' e^{-T_{A'_{ij};kl} \vec{P}'^2} e^{-\vec{P}' \cdot (T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B'_{1ij};kl} \vec{q})} \frac{sh(iP'r')}{P'} = \frac{\pi}{\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B'_{1ij};kl} \vec{q} \right\|} \times \\
& \sqrt{\frac{\pi}{T_{A'_{1ij};kl}}} \left[e^{\frac{\left(\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B'_{1ij};kl} \vec{q} \right\| + ir' \right)^2}{4T_{A'_{1ij};kl}}} - e^{\frac{\left(\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B'_{1ij};kl} \vec{q} \right\| - ir' \right)^2}{4T_{A'_{1ij};kl}}} \right] \quad (B.22)
\end{aligned}$$

avec

$$\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \right\|^2 = T_{G'_{ik;jl}}^2 \vec{P}^2 + T_{B_{1ij;kl}}^2 \vec{q}^2 + 2T_{G'_{ik;jl}} T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \cdot \vec{P} \quad (\text{B.23})$$

On trouve

$$\begin{aligned} T_1(r, r')^{(e)} &= - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \times \\ &\quad \pi \sqrt{\frac{\pi}{T_{A_{1ij;kl}}}} \int d^3 p_1 d^3 q d^3 P e^{-T_{A_{ik;jl}} \vec{p}_1^2} e^{-T_{B'_{ik;jl}} \vec{q}^2} e^{-T_{D'_{ik;jl}} \vec{P}^2} \times \\ &\quad e^{-T_{E'_{1ij;kl}} \vec{q} \cdot \vec{P}} e^{-T_{I_{ik;jl}} \vec{p}_1 \cdot \vec{q}} e^{-T_{J_{ik;jl}} \vec{p}_1 \cdot \vec{P}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}_1}{m} \right)^2} - 1 \right) \times \\ &\quad \frac{sh(iPr)}{P} \frac{1}{\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \right\|} \times \\ &\quad \left[e^{\frac{\left(\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \right\| + ir' \right)^2}{4T_{A_{1ij;kl}}}} - e^{\frac{\left(\left\| T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \right\| - ir' \right)^2}{4T_{A_{1ij;kl}}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Le changement de variable $\vec{q} \rightarrow \vec{W}$ avec :

$$\vec{W} = T_{G'_{ik;jl}} \vec{P} + T_{B_{1ij;kl}} \vec{q} \quad (\text{B.25})$$

Nous donne

$$\begin{aligned} T_1(r, r')^{(e)} &= - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \pi \times \\ &\quad \sqrt{\frac{\pi}{T_{A_{1ij;kl}}}} \left| \frac{1}{T_{B_{1ij;kl}}} \right|^3 \int d^3 p_1 d^3 W d^3 P e^{-T_{A_{ik;jl}} \vec{p}_1^2} e^{-T_{B'''_{ik;jl}} \vec{W}^2} e^{-T_{D'''_{ik;jl}} \vec{P}^2} \\ &\quad e^{-T_{J_{1ij;kl}} \vec{W} \cdot \vec{P}} e^{-T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1 \cdot \vec{W}} e^{-T_{J'_{ik;jl}} \vec{p}_1 \cdot \vec{P}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}_1}{m} \right)^2} - 1 \right) \times \\ &\quad \frac{sh(iPr)}{P} \frac{1}{W} \left[e^{\frac{\|\vec{W}\|^2 - r'^2 + 2ir' \|\vec{W}\|}{4T_{A_{1ij;kl}}}} - e^{\frac{\|\vec{W}\|^2 - r'^2 - 2ir' \|\vec{W}\|}{4T_{A_{1ij;kl}}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

L'expression obtenue pour l'intégrale sur W est :

$$\begin{aligned}
& \int d^3 W e^{-T_{B_{ik;jl}}'' \vec{W}^2} \left[e^{\frac{\|\vec{W}\|^2 + 2ir' \|\vec{W}\|}{4T_{A_{1ij;kl}}}} - e^{\frac{\|\vec{W}\|^2 - 2ir' \|\vec{W}\|}{4T_{A_{1ij;kl}}}} \right] \frac{e^{-\vec{W} \cdot (T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1)}}{W} \\
&= \frac{2\pi}{\|T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1\|} \sqrt{\frac{\pi}{T_{C_{1ij;kl}}}} \left\{ e^{\frac{\alpha'^2 + \|T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1\|^2 + 2\alpha' \|T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1\|}{4T_{C_{1ij;kl}}}} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{\alpha'^2 + \|T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1\|^2 - 2\alpha' \|T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1\|}{4T_{C_{1ij;kl}}}} \right\} \quad (B.27)
\end{aligned}$$

où $\alpha' = \frac{ir'}{2T_{A_{1ij;kl}}}$

De sorte que le changement de variable $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{V}$:

$$\vec{V} = T_{J_{1ij;kl}} \vec{P} + T_{D_{1ij;kl}} \vec{p}_1 \quad (B.28)$$

simplifie l'Eq.(B.26) en :

$$\begin{aligned}
T_1(r, r')^{(e)} &= - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \\
&\quad \pi \sqrt{\frac{\pi}{T_{A_{1ij;kl}}}} \left| \frac{1}{T_{B_{1ij;kl}}} \right|^3 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{T_{C_{1ij;kl}}}} \left| \frac{1}{T_{D_{1ij;kl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'}{4T_{A_{1ij;kl}}}} \times \\
&\quad \int d^3 V d^3 P e^{-T_{A_{ik;jl}}'' \vec{V}^2} e^{-T_{N_{ik;jl}} \vec{P}^2} e^{-T_{H_{1ij;kl}} \vec{V} \cdot \vec{P}} \times \quad (B.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{\vec{V} \cdot T_{J_{1ij;kl}} \vec{P}}{T_{D_{1ij;kl}}} \right)^2} - 1 \right) \frac{sh(iPr)}{P} \frac{1}{V} \times \\
&\left[e^{ir' T_{N_{ik;jl}}'' \|\vec{V}\|} - e^{-ir' T_{N_{ik;jl}}'' \|\vec{V}\|} \right] e^{-\frac{r'^2}{16T_{A_{1ij;kl}}^2 T_{C_{1ij;kl}}}} \quad (B.30)
\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
&\int d^3 P e^{-T_{N_{ik;jl}} \vec{P}^2} e^{-T_{H_{1ij;kl}} \vec{V} \cdot \vec{P}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{\vec{V} \cdot T_{J_{1ij;kl}} \vec{P}}{T_{D_{1ij;kl}}} \right)^2} - 1 \right) \frac{sh(iPr)}{P} = \\
&\int dP P e^{-T_{N_{ik;jl}} \vec{P}^2} sh(iPr) \int d\Omega_P e^{-T_{H_{1ij;kl}} \vec{V} \cdot \vec{P}} \times \\
&\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{\vec{V} \cdot T_{J_{1ij;kl}} \vec{P}}{T_{D_{1ij;kl}}} \right)^2} - 1 \right) \quad (B.31)
\end{aligned}$$

Il faut se rappeler que :

Si $\frac{\gamma}{\beta} > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-\gamma x} \sqrt{\alpha + \beta x} dx &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta}} \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \sqrt{\alpha - \beta} e^{-\frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \sqrt{\alpha + \beta} e^{-\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\beta}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\beta}} \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Si $\frac{\gamma}{\beta} < 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 e^{-\gamma x} \sqrt{\alpha + \beta x} dx \\ &= -\frac{1}{\gamma} \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}} e^{\frac{\gamma \alpha}{\beta}} \left\{ \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}} \sqrt{\alpha + \beta} e^{-\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\beta}} - \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}} \sqrt{\alpha - \beta} e^{-\frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta}} - \right. \\ &\quad \left. i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(-i \sqrt{-\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\beta}} \right) - \operatorname{erf} \left(-i \sqrt{-\frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Ainsi le calcul de l'intégrale angulaire de (B.31) nous donne :

Si $\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}} > 0$:

$$\int d\Omega_P e^{-T_{H1_{ik;jl}} \vec{V} \cdot \vec{P}} \left(\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}} \vec{V} \cdot \vec{P}} - 1 \right) = \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} &-\frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}} VP} \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}} VP} e^{-T_{H1_{ik;jl}} VP} + \\ &\frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}} \sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} VP} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}} T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}} VP} \sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \right) + \\ &\frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}} VP} e^{-T_{H1_{ik;jl}} VP} + \frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}} VP} \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}} VP} e^{T_{H1_{ik;jl}} VP} - \\ &\frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H1_{ik;jl}} \sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} VP} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}} M_{ik;jl}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}} VP} \sqrt{\frac{T_{H1_{ik;jl}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \right) \\ &-\frac{2\pi}{T_{H1_{ik;jl}} VP} e^{T_{H1_{ik;jl}} VP} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Si $\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}} < 0$:

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_P \left(\sqrt{\alpha_{1ik;jl} + \beta_{1ik;jl}} \vec{V} \cdot \vec{P} - 1 \right) &= -\frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}} VP} \sqrt{\alpha_{1ik;jl} + \beta_{1ik;jl}} VP e^{-T_{H_{1ik;jl}} VP} + \\
&+ i \frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1ik;jl}} \sqrt{-\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}} VP}} e^{\frac{\alpha_{1ik;jl} T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \operatorname{erf} \left(-i \sqrt{\alpha_{1ik;jl} + \beta_{1ik;jl}} VP \sqrt{-\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \right) + \\
&\frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}} VP} e^{-T_{H_{1ik;jl}} VP} + \frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}} VP} \sqrt{\alpha_{1ik;jl} - \beta_{1ik;jl}} VP e^{T_{H_{1ik;jl}} VP} - \\
&+ i \frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1ik;jl}} \sqrt{-\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}} VP}} e^{\frac{\alpha_{1ik;jl} T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \operatorname{erf} \left(-i \sqrt{\alpha_{1ik;jl} - \beta_{1ik;jl}} VP \sqrt{-\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \right) \\
&- \frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}} VP} e^{T_{H_{1ik;jl}} VP}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Finalement nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(r, r', I = 0)^{(e)} = 0 \\ T_1(r, r', I = 1)^{(e)} = - \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \frac{8\pi}{9} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \right)^3 \left(\frac{1}{\gamma_k \gamma_l} \right)^{\frac{3}{2}} m \times \\ \left(\frac{\sqrt{3}(1+\omega)}{\sqrt{\omega(4+\omega)}} \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{T_{A_{1ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{B_{1ik;jl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'^2}{4T_{A_{1ik;jl}}}} \sqrt{\frac{\pi}{T_{C_{1ik;jl}}}} \left| \frac{1}{T_{D_{1ik;jl}}} \right|^3 e^{-\frac{r'^2}{16T_{A_{1ik;jl}}^2 T_{C_{1ik;jl}}}} \times \\ \int_0^\infty dV e^{-T_{E_{1ik;jl}} \vec{V}^2} sh \left(iT_{F_{1ik;jl}} V \right) \int_0^\infty dP e^{-T_{G_{1ik;jl}} \vec{P}^2} sh \left(iPr \right) \times \\ \left[-\frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{1ik;jl} + \beta_{1ik;jl}} VP e^{-T_{H_{1ik;jl}} VP} + \frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}}} e^{-T_{H_{1ik;jl}} VP} + \right. \\ \left. \frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}}} \sqrt{\alpha_{1ik;jl} - \beta_{1ik;jl}} VP e^{T_{H_{1ik;jl}} VP} - \frac{2\pi}{T_{H_{1ik;jl}}} e^{T_{H_{1ik;jl}} VP} + \mathcal{I}_{ik;jl} \right] \end{array} \right. \tag{B.37}$$

Avec deux cas possibles :

Si $\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}} > 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{ik;jl} &= \frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1ik;jl}} \sqrt{\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{1ik;jl} T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha_{1ik;jl} + \beta_{1ik;jl}} VP \sqrt{\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \right) - \\
&\frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1ik;jl}} \sqrt{\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}}} e^{\frac{\alpha_{1ik;jl} T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha_{1ik;jl} - \beta_{1ik;jl}} VP \sqrt{\frac{T_{H_{1ik;jl}}}{\beta_{1ik;jl}}} \right)
\end{aligned}$$

Si $\frac{T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}} < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ik;jl} = & i \frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1_{ik;jl}}} \sqrt{-\frac{T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}} T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf} \left(-i \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} + \beta_{1_{ik;jl}}} VP \sqrt{-\frac{T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \right) - \\ & i \frac{\pi \sqrt{\pi}}{T_{H_{1_{ik;jl}}} \sqrt{-\frac{T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}}} e^{\frac{\alpha_{1_{ik;jl}} T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \operatorname{erf} \left(-i \sqrt{\alpha_{1_{ik;jl}} - \beta_{1_{ik;jl}}} VP \sqrt{-\frac{T_{H_{1_{ik;jl}}}}{\beta_{1_{ik;jl}}}} \right) \end{aligned}$$

Avec

$$\alpha_{1_{ik;jl}} = 1 + \frac{1}{m^2 T_{D_{1_{ik;jl}}}^2} \left(\vec{V}^2 + T_{J_{1_{ik;jl}}}^2 \vec{P}^2 \right) \quad (\text{B.38})$$

et

$$\beta_{1_{ik;jl}} = -\frac{2T_{J_{1_{ik;jl}}}^2}{m^2 T_{D_{1_{ik;jl}}}^2} \quad (\text{B.39})$$

Annexe C

Exemple de calcul des termes centraux et hyperfins d'un noyau d'énergie potentielle d'échange

Nous allons nous intéresser au calcul des parties centrales et hyperfines d'un noyau d'énergie potentielle d'échange pour un état de moment angulaire relatif quelconque entre les deux clusters. Il est défini par :

$$V_{34}(r', r, J, L; I)^{(e)} = \left\langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') \left| P_{34} V_{34}^{(\rho)} \right| \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \right\rangle \quad (C.1)$$

où $\phi(1, 2, 3, 4, 5, r)$ est la fonction d'onde déterminée Eq.(2.70) et $V_{34}^{(\rho)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|)$ représente la partie centrale ou hyperfine ($\rho = c$ ou σ) du potentiel d'interaction Eq.(2.2) ou Eq.(2.4) entre les quarks 3 et 4.

Nous passerons sur le calcul de la partie couleur de cet élément de matrice qui est identique à [54, 57] et qui donne :

$$\left\langle C(1, 2, 3)C(4, 5) \left| P_{34} \left(-\frac{3}{16} \right) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_4 \right| C(1, 2, 3)C(4, 5) \right\rangle = -\frac{1}{3} \quad (C.2)$$

Nous nous concentrerons sur le calcul des parties spin-isospin-espace du noyau (C.1)

C.1 Partie centrale

L'évaluation du noyau (C.1) nous donne pour la partie centrale du potentiel avec la fonction d'onde Eq.(2.70) :

$$V_{34}^{(c)}(r', r, J, L; I)^{(e)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^1 \langle [\eta_i \eta] | P_{34} | [\eta_j \eta] \rangle \times \langle \{ [\chi_i \chi] \text{ } E s p_{r'} \}_{JM} | P_{34} V_{34}^{(c)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) | \{ [\chi_j \chi] \text{ } E s p_r \}_{JM} \rangle \quad (C.3)$$

où

$$\langle [\eta_i \eta] | P_{34} | [\eta_j \eta] \rangle = \delta_{ij} \mathcal{J}(i, I) \quad (C.4)$$

avec

$$\mathfrak{I}(i, I) = 2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{array} \right\} \quad (\text{C.5})$$

et

$$\left\langle \{Esp_r\}_{JM} \left| \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R} \right. \right\rangle = \left\{ F(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{z}) \frac{\delta(R-r)}{R} Y_L(\hat{R}) \right\}_{JM} \quad (\text{C.6})$$

Nous allons nous intéresser à la partie spin-espace de (C.3) donnée par :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ [\chi_i \chi] F(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{z}) \frac{\delta(R-r)}{R} Y_L(\hat{R}) \right\}_{JM} \left| P_{34} V_{34}^{(c)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) \right. \right. \\ & \left. \left| \left\{ [\chi_j \chi] F(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{z}) \frac{\delta(R-r)}{R} Y_L(\hat{R}) \right\}_{JM} \right. \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma, M_L, \sigma', M'_L} \left\langle \frac{1}{2} \sigma' L M'_L | JM \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \sigma L M_L | JM \right\rangle \left\langle [\chi_i \chi]_{\frac{1}{2}\sigma'} \left| P_{34} \right| [\chi_j \chi]_{\frac{1}{2}\sigma} \right\rangle \times \\ & \quad \langle \{Esp_{r'}\}_{JM} | P_{34} V_{34}^{(c)} | \{Esp_r\}_{JM} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

avec

$$\left\langle [\chi_i \chi]_{\frac{1}{2}\sigma'} \left| P_{34} \right| [\chi_j \chi]_{\frac{1}{2}\sigma} \right\rangle = \frac{1}{2} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{ij} \quad (\text{C.8})$$

De plus, l'invariance par rotation du potentiel $V_{34}^{(c)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|)$ amène une contribution de la forme :

$$\langle \{Esp_{r'}\}_{JM} | P_{34} V_{34}^{(c)} | \{Esp_r\}_{JM} \rangle \propto \delta_{M_L, M'_L} \quad (\text{C.9})$$

Des lors la sommation sur les Clebsch-Gordan dans (C.7) donne 1. Nous en concluons que la partie spin-isospin pour la partie centrale du potentiel $V_{34} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|)$ se réduit à (la partie espace de (C.1) étant indépendante de i) :

$$Spin-Isospin = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{array} \right\} \frac{1}{2} = \mathfrak{I}(I) = \begin{cases} 0 & \text{pour } I = 0 \\ 1 & \text{pour } I = 1 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

C.2 Partie hyperfine

Le calcul de la partie isospin-espace est identique au précédent en remplaçant $V_{34}^{(c)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|)$ par $V_{34}^{(\sigma)} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|)$. La seule différence réside dans l'élément de matrice de spin qui vaut :

$$\left\langle [\chi_i \chi]_{\frac{1}{2}\sigma'} \left| P_{34} \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_4 \right| [\chi_j \chi]_{\frac{1}{2}\sigma} \right\rangle = \frac{3}{2} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{ij} \quad (\text{C.11})$$

Ainsi la contribution spin-isospin sera égale à :

$$Spin-Isospin = 3\mathfrak{I}(I) \quad (\text{C.12})$$

Il s'agit maintenant de calculer la partie espace du noyau d'énergie potentielle (C.1). Il s'écrit à partir de (C.3) :

$$V_{34}^{(\rho)}(r', r, L) = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \int e^{-\frac{\alpha_i}{2}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2)} e^{-\frac{\gamma_k}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R' - r')}{R'} Y_{LM_L}^*(\hat{R}') \times \\ V_{34}^{(\rho)}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) e^{-\frac{\alpha_j}{2}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2)} e^{-\frac{\gamma_l}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R - r)}{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) d^3 x d^3 y d^3 z d^3 R \quad (C.13)$$

où $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{R}'$ sont les variables de Jacobi après application de l'opérateur P_{34} .

Les variables de Jacobi définies en (2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51) nous informent que $|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|$ est indépendant de x .

L'intégrale sur x est alors immédiate :

$$\int e^{-\frac{(\alpha_i + \alpha_j)}{2} \vec{x}^2} d^3 x = \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (C.14)$$

et donne :

$$V_{34}^{(\rho)}(r', r, L) = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \left(\frac{2\pi}{\alpha_i + \alpha_j} \right)^{\frac{3}{2}} I_{ik;jl}(r', r) \quad (C.15)$$

Il nous reste donc à calculer :

$$I_{ik;jl}(r', r) = \int e^{-\frac{\alpha_i}{2} \vec{y}^2} e^{-\frac{\gamma_k}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R' - r')}{R'} Y_{LM_L}^*(\hat{R}') \times \\ V_{34}^{(\rho)}(|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) e^{-\frac{\alpha_j}{2} \vec{y}^2} e^{-\frac{\gamma_l}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R - r)}{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) d^3 y d^3 z d^3 R \quad (C.16)$$

Pour cela, nous définissons un nouveau jeu de variables $\vec{v}, \vec{R}, \vec{R}'$.

L'intégrale qui nous reste à calculer devient :

$$I_{ik;jl}(r', r) = \int e^{-\frac{1}{2} F_{ik;jl} \vec{v}^2 - \frac{1}{2} G_{ik;jl} \vec{R}^2 - \frac{1}{2} H_{ik;jl} \vec{R}'^2 - W_{ik;jl} \vec{R} \cdot \vec{R}'} \frac{\delta(R' - r')}{R'} \times \\ Y_{LM_L}^*(\hat{R}') V_{34}^{(\rho)}(|\beta| |\vec{R} - \vec{R}'|) \frac{\delta(R - r)}{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) d^3 v d^3 R d^3 R' \quad (C.17)$$

où β est une constante ; toutes les quantités ayant $(ik; jl)$ pour indice sont des constantes qui ne dépendent que de $\alpha_i, \alpha_j, \gamma_k, \gamma_l$.

Nous pouvons alors facilement intégrer sur v pour trouver :

$$I_{ik;jl}(r', r) = \left(\frac{2\pi}{F_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} J_{ik;jl}(r', r) \quad (C.18)$$

où

$$J_{ik;jl}(r', r) = \int e^{-\frac{1}{2} G_{ik;jl} \vec{R}^2 - \frac{1}{2} H_{ik;jl} \vec{R}'^2 - W_{ik;jl} \vec{R} \cdot \vec{R}'} \frac{\delta(R' - r')}{R'} \times \\ Y_{LM_L}^*(\hat{R}') V_{34}^{(\rho)}(|\beta| |\vec{R} - \vec{R}'|) \frac{\delta(R - r)}{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) d^3 R d^3 R' \quad (C.19)$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons le développement sur les harmoniques sphériques suivant :

$$e^{-W_{ik;jl}\vec{R} \cdot \vec{R}} = 4\pi \sum_{l_1=0}^{\infty} \sqrt{2l_1+1} \varphi_{l_1} i_{l_1} (|W_{ik;jl}| RR') \left[Y_{l_1}(\hat{R}') \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \quad (C.20)$$

et un développement multipolaire de l'interaction :

$$V_{34}^{(\rho)}(\beta \left| \vec{R} - \vec{R}' \right|) = 2\pi \sum_{l_2=0}^{\infty} (-1)^{l_2} \sqrt{2l_2+1} V_{l_2}(R, R', \beta) \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_2}(\hat{R}) \right]_0 \quad (C.21)$$

avec

$$V_{l_2}(R, R', \beta) = \int_{-1}^1 V_{34}^{(\rho)} \left(|\beta| \sqrt{\vec{R}^2 + \vec{R}'^2 - 2RR't} \right) P_{l_2}(t) dt \quad (C.22)$$

où $P_{l_2}(t)$ sont les fonctions de Legendre de 1^{ère} espèce.

Nous trouvons alors que :

$$J_{ik;jl}(r', r) = \frac{8\pi^2}{rr'} \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} (-1)^{l_2} \varphi^{l_1} \sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_2+1} \int d^3R d^3R' \times$$

$$e^{-\frac{1}{2}G_{ik;jl}\vec{R}^2 - \frac{1}{2}H_{ik;jl}\vec{R}'^2} \varphi_{l_1} i_{l_1} (|W_{ik;jl}| RR') \delta(R' - r') V_{l_2}(R, R', \beta) \delta(R - r) \times (C.23)$$

$$Y_{LM_L}^*(\hat{R}') Y_{LM_L}(\hat{R}) \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{R}') \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_2}(\hat{R}) \right]_0 \right\}_0 \quad (C.24)$$

La relation suivante sur les couplages entre harmoniques sphériques :

$$\left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{R}') \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_2}(\hat{R}) \right]_0 \right\}_0 =$$

$$\sum_{l_3=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2l_3+1}}{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}} \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{R}') \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_{l_3} \otimes \right.$$

$$\left. \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}) \right]_{l_3} \right\}_0 \quad (C.25)$$

et l'expression des deux intégrales angulaires :

$$\int d\hat{R} Y_{LM_L}^*(\hat{R}') \left[Y_{l_1}(\hat{R}') \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_{l_3 m'_3}$$

$$= \delta_{l_3, L} \delta_{m'_3, M_L} \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{2l_3+1}} \langle l_1 0 l_2 0 | l_3 0 \rangle \quad (C.26)$$

$$\int d\hat{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}) \right]_{l_3 m_3}$$

$$= \delta_{l_3, L} \delta_{m_3, -M_L} (-1)^{M_L} \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{2l_3+1}} \langle l_1 0 l_2 0 | l_3 0 \rangle \quad (C.27)$$

Nous donne finalement pour notre intégrale d'espace :

$$\begin{aligned}
 J_{ik;jl}(r', r) &= 2\pi r r' e^{-\frac{1}{2}G_{ik;jl} \vec{r}^2 - \frac{1}{2}H_{ik;jl} \vec{r}'^2} \times \\
 &\sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} (-1)^{l_1} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2L+1)} \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \times \\
 &\varphi^{l_1} i_{l_1} (|W_{ik;jl}| r r') V_{l_2}(r, r', \beta)
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

En conclusion, notre noyau d'énergie potentielle d'échange $V_{34}(r', r, J, L; I)^{(e)}$ s'écrit pour chacun des deux canaux d'isospin :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 V_{34}(r', r, J, L; I = 0)^{(e)} = 0 \\
 V_{34}(r, r', J, L; I = 1)^{(e)} = -\frac{1}{9} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l [V_{34}_{ik;jl}^{(c)}(r, r', L) + 3V_{34}_{ik;jl}^{(\sigma)}(r, r', L)] \\
 \text{avec } V_{34}_{ik;jl}^{(\rho)}(r, r', L) = \frac{(2\pi)^4}{[F_{ik;jl}(\alpha_i + \alpha_j)]^{\frac{3}{2}}} r r' e^{-\frac{1}{2}(G_{ik;jl} r^2 + H_{ik;jl} r'^2)} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=|L-l_1|}^{L+l_1} \times \\
 (-1)^{l_1} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2L+1} \phi_{l_1} i_{l_1}(r r' |W_{ik;jl}|) \langle l_1 0 l_2 0 | L 0 \rangle^2 \times \\
 \int_{-1}^1 V_{34}^{(\rho)}(|\beta| \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}) P_{l_2}(t) dt
 \end{array} \right. \tag{C.29}$$

Annexe D

Calcul d'un terme spin-orbite d'un noyau d'énergie potentielle d'échange

D.1 Rappel sur les opérateurs tensoriels

Si $T_q^{(k)}$ est un opérateur tensoriel irréductible de rang k avec $(q = -k \dots + k)$ alors nous avons les propriétés suivantes :

$$\langle \tau J M | T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2J+1}} \langle J' k M' q | J M \rangle \langle \tau J || T^{(k)} || \tau' J' \rangle \quad (D.1)$$

où $\langle \tau J || T^{(k)} || \tau' J' \rangle$ est l'élément de matrice réduit.

De plus nous avons la relation suivante pour k entier :

$$\langle \tau J || T^{(k)} || \tau' J' \rangle^* = (-1)^{J'-J} \langle \tau J || T^{(k)\dagger} || \tau' J' \rangle \quad (D.2)$$

Opérateurs tensoriels particuliers

– Opérateur identité

$$\langle \tau J || \mathbb{1} || \tau' J' \rangle = \delta_{\tau\tau'} \delta_{JJ'} \sqrt{2J+1} \quad (D.3)$$

– Opérateur moment cinétique total

$$\langle \tau J || \vec{J} || \tau' J' \rangle = \delta_{\tau\tau'} \delta_{JJ'} \sqrt{2J+1} \sqrt{J(J+1)} \quad (D.4)$$

Si $T^{(k_1)}$ est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre k_1 qui n'agit que dans un espace ξ^1 de vecteurs de base $|\tau_1 J_1 M_1\rangle, |\tau'_1 J'_1 M'_1\rangle$ et $U^{(k_2)}$ est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre k_2 qui n'agit que dans un espace ξ^2 de vecteurs de base $|\tau_2 J_2 M_2\rangle, |\tau'_2 J'_2 M'_2\rangle$ alors le produit tensoriel d'ordre χ est l'opérateur tensoriel irréductible d'ordre χ de composantes :

$$V_q^{(\chi)} = \sum_{\kappa_1, \kappa_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | \chi q \rangle T_{q_1}^{(k_1)} U_{q_2}^{(k_2)} \quad (D.5)$$

avec

$$V^{(\chi)} = [T^{(k_1)} \otimes U^{(k_2)}]_{\chi} \quad (D.6)$$

Dans la représentation standard $\{\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{J}_1^2, \vec{J}_2^2, \vec{J}^2, J_z\}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 J_1 \tau_2 J_2; J || V^{(\chi)} || \tau'_1 J'_1 \tau'_2 J'_2; J' \rangle &= \sqrt{2J+1} \sqrt{2J'+1} \sqrt{2\chi+1} \times \\ &\left\{ \begin{array}{ccc} J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & \chi \\ J_1 & J_2 & J \end{array} \right\} \langle \tau_1 J_1 || T^{(k_1)} || \tau'_1 J'_1 \rangle \langle \tau_2 J_2 || U^{(k_2)} || \tau'_2 J'_2 \rangle \end{aligned} \quad (D.7)$$

Cas particulier

– Si $U = \mathbb{1}$ alors $\chi = k_1 = k$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 J_1 \tau_2 J_2; J || T^{(k)} || \tau'_1 J'_1 \tau'_2 J'_2; J' \rangle &= \delta_{\tau_2 \tau'_2} \delta_{J_2 J'_2} \langle \tau_1 J_1 || T^{(k)} || \tau'_1 J'_1 \rangle \times \\ &(-1)^{J'+J_1+J_2+k} \sqrt{2J+1} \times \\ &\sqrt{2J'+1} \left\{ \begin{array}{ccc} J_1 & k & J'_1 \\ J' & J_2 & J \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (D.8)$$

– Si $T = \mathbb{1}$ alors $\chi = k_2 = k$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 J_1 \tau_2 J_2; J || U^{(k)} || \tau'_1 J'_1 \tau'_2 J'_2; J' \rangle &= \delta_{\tau_1 \tau'_1} \delta_{J_1 J'_1} \langle \tau_2 J_2 || U^{(k)} || \tau'_2 J'_2 \rangle \times \\ &(-1)^{J+J_1+J'_2+k} \sqrt{2J+1} \times \\ &\sqrt{2J'+1} \left\{ \begin{array}{ccc} J_2 & k & J'_2 \\ J' & J_1 & J \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (D.9)$$

– Si $\chi = 0$ alors $k_1 = k_2 = k$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 J_1 \tau_2 J_2; JM || T^{(k)} . U^{(k)} || \tau'_1 J'_1 \tau'_2 J'_2; J' M' \rangle &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times \\ &(-1)^{J+J'_1+J_2} \left\{ \begin{array}{ccc} J_1 & k & J'_1 \\ J'_2 & J & J_2 \end{array} \right\} \times \\ &\langle \tau_1 J_1 || T^{(k)} || \tau'_1 J'_1 \rangle \times \\ &\langle \tau_2 J_2 || U^{(k)} || \tau'_2 J'_2 \rangle \end{aligned} \quad (D.10)$$

De plus, tout au long de ce calcul nous utiliserons la décomposition des produits scalaires et vectoriels en harmoniques sphériques :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| [Y_1(\hat{A}) \otimes Y_1(\hat{B})]_{00} \quad (D.11)$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})_\mu = -i\sqrt{2}\frac{4\pi}{3} \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| [Y_1(\hat{A}) \otimes Y_1(\hat{B})]_{1\mu} \quad (D.12)$$

ainsi que les résultats standards :

$$Y_{lm}(\hat{r})^* = (-1)^m Y_{l-m}(\hat{r}) \quad (D.13)$$

$$[Y_{l_1}(\hat{r}) \otimes Y_{l_2}(\hat{r})]_{LM} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}}{\sqrt{2L+1}} \langle l_1 0 \ l_2 0 | L 0 \rangle Y_{LM}(\hat{r}) \quad (D.14)$$

$$[[Y_{l_1}(\hat{r}) \otimes Y_{l_2}(\hat{r})]_{L'} \otimes Y_{l_3}(\hat{r})]_{LM} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{2l_3+1}}{\sqrt{2L+1}} \times \langle l_1 0 \ l_2 0 | L' 0 \rangle \langle L' 0 \ l_3 0 | L 0 \rangle Y_{LM}(\hat{r}) \quad (D.15)$$

$$\left[\cdots \left[[Y_{l_1}(\hat{r}) \otimes Y_{l_2}(\hat{r})]_{L_2} \otimes Y_{l_3}(\hat{r}) \right]_{L_3} \cdots \right]_{L_{n-1}} \otimes Y_{l_n}(\hat{r}) \Big]_{L_n M_n} = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2L_n+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\sqrt{2l_i+1}}{\sqrt{4\pi}} \langle L_{i-1} 0 \ l_i 0 | L_i 0 \rangle \right) Y_{L_n M_n}(\hat{r}) \quad (D.16)$$

Nous nous servons aussi des éléments de matrice réduits suivant :

$$\langle Y_{L'} || 1 || Y_L \rangle = \delta_{LL'} \sqrt{2L'+1} \quad (D.17)$$

$$\langle Y_{L'} || Y_l || Y_L \rangle = \frac{\sqrt{2l+1}\sqrt{2L+1}}{\sqrt{4\pi}} \langle l 0 \ L 0 | L' 0 \rangle \quad (D.18)$$

$$\langle Y_{L'} || [Y_{l_1} \otimes Y_{l_2}]_l || Y_L \rangle = \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{2L+1}}{4\pi} \langle l_1 0 \ l_2 0 | l 0 \rangle \langle l 0 \ L 0 | L' 0 \rangle \quad (D.19)$$

$$\begin{aligned} \langle Y_{L'} || [(Y_{l_1} \otimes Y_{l_2})_{l_{12}} \otimes Y_{l_3}]_l || Y_L \rangle &= \\ \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{2l_3+1}\sqrt{2L+1}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \langle l_1 0 \ l_2 0 | l_{12} 0 \rangle \times \\ \langle l_{12} 0 \ l_3 0 | l 0 \rangle \langle l 0 \ L 0 | L' 0 \rangle &\quad (D.20) \end{aligned}$$

D.2 Noyau spin-orbite d'échange

Nous allons maintenant calculer un des noyaux spin-orbite d'échange qui intervient dans l'équation de diffusion (2.88) par l'intermédiaire du potentiel (2.2) ou (2.4). Nous nous intéresserons par exemple à l'élément de matrice suivant :

$$V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = \langle \phi(1, 2, 3, 4, 5, r') | P_{34} V_{24}^{(ls)} | \phi(1, 2, 3, 4, 5, r) \rangle \quad (D.21)$$

où

$$V_{24}^{(ls)} = V_{24}^{(ls)} \left(-\frac{3}{16} \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_4 \right) \left(\vec{l}_{24} \cdot \vec{s}_{24} \right) \quad (D.22)$$

et

$$V_{24}^{(ls)} = \frac{V_0}{m^2} e^{-\frac{r_{24}^2}{r_0^2}} \quad (D.23)$$

$$r_{24} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_4| \quad (D.24)$$

$$\vec{s}_{24} = \vec{s}_2 + \vec{s}_4 \quad (D.25)$$

$$\vec{l}_{24} = \vec{r}_{24} \wedge \vec{p}_{24} \quad (D.26)$$

$$\vec{p}_{24} = \frac{m \vec{r}_2 - m \vec{r}_4}{m + m} \quad (D.27)$$

Ce noyau d'énergie potentielle d'échange entre quarks 2 et 4 s'écrit, à partir de la fonction d'onde du système KN (2.70) :

$$V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^1 \langle [\eta_i \eta] | P_{34} | [\eta_j \eta] \rangle \langle \{ [\chi_i \chi] E s p_{r'} \}_{JM} | P_{34} V_{24}^{(ls)} \left(-\frac{3}{16} \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_4 \right) \left(\vec{l}_{24} \cdot \vec{s}_{24} \right) | \{ [\chi_j \chi] E s p_r \}_{JM} \rangle \quad (D.28)$$

Le terme propre à l'isospin donne d'après l'Annexe C :

$$\langle [\eta_i \eta] | P_{34} | [\eta_j \eta] \rangle = \delta_{ij} \mathfrak{I}(i, I) \quad (\text{D.29})$$

où

$$\mathfrak{I}(i, I) = 2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{array} \right\} \quad (\text{D.30})$$

Pour alléger les notations nous introduirons les quantités :

$$\mathcal{S}_i^d = [\chi_j \chi]_{\frac{1}{2}} = \left\{ [(s_1 s_2)_i s_3]_{\frac{1}{2}} (s_4 s_5)_0 \right\}_{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.31})$$

$$\mathcal{S}_i^g = P_{34} [\chi_i \chi]_{\frac{1}{2}} = \left\{ [(s_1 s_2)_i s_4]_{\frac{1}{2}} (s_3 s_5)_0 \right\}_{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.32})$$

$$\mathcal{E}_L^d = F(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{z}) \frac{\delta(R-r)}{R} Y_L(\hat{R}) \quad (\text{D.33})$$

$$\mathcal{E}_L^g = P_{34} \mathcal{E}_L^d = F(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{z}) \frac{\delta(R'-r')}{R'} Y_L(\hat{R}') \quad (\text{D.34})$$

où $\vec{x}, \vec{y}', \vec{z}', \vec{R}'$ sont les variables de Jacobi obtenues après permutation des quarks 3 et 4.

Dans tous les cas, nous verrons apparaître un élément de matrice de la forme :

$$\begin{aligned} V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} &= \frac{1}{2} \mathcal{C}_{24} \sum_{i=0}^1 \mathfrak{I}(i, I) \\ \langle [\mathcal{S}_i^g \mathcal{E}_L^g]_{JM} | \left(-\frac{3}{16} \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_4 \right) V_{24}^{(ls)}(\vec{l}_{24} \cdot \vec{s}_{24}) | [\mathcal{S}_i^d \mathcal{E}_L^d]_{JM} \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

avec

$$\mathcal{C}_{24} = \langle C(1, 2, 3) C(4, 5) | P_{34} \left(-\frac{3}{16} \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_4 \right) | C(1, 2, 3) C(4, 5) \rangle$$

La formule (D.7) appliquée à l'élément de matrice spin-espace de (D.35) donne :

$$\begin{aligned} &\langle [\mathcal{S}_i^g \mathcal{E}_L^g]_{JM} | V_{24}^{(ls)}(\vec{l}_{24} \cdot \vec{s}_{24}) | [\mathcal{S}_i^d \mathcal{E}_L^d]_{JM} \rangle = \\ &(-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ L & J & L \end{array} \right\} \langle \mathcal{S}_i^g || \vec{s}_{24} || \mathcal{S}_i^d \rangle \cdot \left\langle \mathcal{E}_L^g \left| \left| V_{24}^{(ls)} \vec{l}_{24} \right| \right| \mathcal{E}_L^d \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Soit en notant :

$$\mathcal{S}_{24}(i) = \langle \mathcal{S}_i^g || \vec{s}_{24} || \mathcal{S}_i^d \rangle \quad (\text{D.37})$$

$$\mathcal{E}_{24}(r', r, L) = \left\langle \mathcal{E}_L^g \left| \left| V_{24}^{(ls)} \vec{l}_{24} \right| \right| \mathcal{E}_L^d \right\rangle \quad (\text{D.38})$$

Notre élément de matrice de départ (D.35) se réduit donc au calcul de :

$$V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} = \mathcal{C}_{24} \mathcal{E}_{24}(r', r, L) (-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ L & J & L \end{array} \right\} \sum_{i=0}^1 \frac{\mathfrak{I}(i, I) \mathcal{S}_{24}(i)}{2} \quad (\text{D.39})$$

Le calcul du terme de couleur a déjà été fait par le passé [54, 57] et donne la contribution :

$$\mathcal{C}_{24} = \frac{1}{6} \quad (\text{D.40})$$

D.2.1 Partie spin

- Pour calculer le terme de spin $\langle \mathcal{S}_i^g || \vec{s}_{24} || \mathcal{S}_i^d \rangle$ il est nécessaire de faire les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i^d &= \left\{ [(s_1 s_2)_i s_3]_{\frac{1}{2}} (s_4 s_5)_0 \right\}_{\frac{1}{2}} = \\ &\sum_{kls_{24}} (-1)^{1+i+s_{24}} \frac{\sqrt{2i+1} \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \sqrt{2s_{24}+1}}{\sqrt{2}} \\ &\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ \frac{1}{2} & l & s_{24} \end{array} \right\} \left\{ [(s_1 s_3)_k s_5]_l (s_2 s_4)_{s_{24}} \right\}_{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i^g &= \left\{ [(s_1 s_2)_i s_4]_{\frac{1}{2}} (s_3 s_5)_0 \right\}_{\frac{1}{2}} = \\ &\sum_{k's'_{24}} (-1)^{k'+1} \frac{\sqrt{2i+1} \sqrt{2k'+1} \sqrt{2s'_{24}+1}}{2} \\ &\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s'_{24} \end{array} \right\} \left\{ [(s_1 s_3)_{k'} s_5]_{\frac{1}{2}} (s_2 s_4)_{s'_{24}} \right\}_{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

On en déduit en regroupant ces deux termes et en utilisant les propriétés (D.4) et (D.8) :

$$\mathcal{S}_{24}(i) = (2i+1) \sum_{ks_{24}} (-1)^{k+i} (2k+1) (\sqrt{2s_{24}+1})^3 \sqrt{s_{24}(s_{24}+1)} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ s_{24} & s_{24} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{D.43})$$

Comme la propriété suivante sur les 6J est vérifiée :

$$\sum_k (-1)^k \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} = (-1)^{i+s_{24}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \end{array} \right\} \quad (\text{D.44})$$

Nous obtenons finalement pour le spin :

$$\mathcal{S}_{24}(i) = (2i+1) \sum_{s_{24}} (-1)^{s_{24}} (\sqrt{2s_{24}+1})^3 \sqrt{s_{24}(s_{24}+1)} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ s_{24} & s_{24} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{D.45})$$

Nous rassemblons les différentes contributions (D.29), (D.30) et (D.45) pour aboutir à une partie spin-isospin égale à :

$$\sum_{i=0}^1 \frac{\mathfrak{I}(i, I) \mathcal{S}_{24}(i)}{2} = \sum_{s_{24}} (-1)^{s_{24}} (\sqrt{2s_{24}+1})^3 \sqrt{s_{24}(s_{24}+1)} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ s_{24} & s_{24} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \times$$

$$\sum_i (-1)^{2i} (2i+1) \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} \quad (\text{D.46})$$

En remarquant que :

$$\sum_i (-1)^{2i} (2i+1) \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s_{24} \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & s_{24} & \frac{1}{2} \\ s_{24} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{D.47})$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{i=0}^1 \frac{\mathfrak{I}(i, I) \mathcal{S}_{kl}(i)}{2} = \sqrt{6} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & I \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{D.48})$$

D.2.2 Partie espace

Nous allons maintenant calculer le terme d'espace de (D.39) :

$$\mathcal{E}_{24}(r', r, L) = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l \mathcal{E}_{24_{ik;jl}}(r', r, L) \quad (\text{D.49})$$

où

$$\mathcal{E}_{24_{ik;jl}}(r', r, L) = \langle (Esp_{r'})_{JM} | V_{24}^{(ls)} \vec{l}_{24} | (Esp_r)_{JM} \rangle \quad (\text{D.50})$$

Nous calculerons l'élément de matrice suivant :

$$\begin{aligned} & \langle (Esp_{r'})_{JM} | V_{24}^{(ls)} \vec{l}_{24} | (Esp_r)_{JM} \rangle \\ = & \int e^{-\frac{\alpha_i}{2}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2)} e^{-\frac{\gamma_k}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R' - r')}{R'} Y_{LM_L}^*(\hat{R}') V_{24}^{(ls)}(|\vec{r}_{24}|) \times \\ & \vec{l}_{24} e^{-\frac{\alpha_j}{2}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2)} e^{-\frac{\gamma_l}{2} \vec{z}^2} \frac{\delta(R - r)}{R} Y_{LM_L}(\hat{R}) d^3 x d^3 y d^3 z d^3 R \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

en se rappelant que :

$$\langle Y_L(\hat{R}') | \vec{l}_{24} | Y_L(\hat{R}) \rangle = \frac{\sqrt{2L+1}}{\langle LM_L 1\mu | LM_L' \rangle} \left\langle Y_{LM_L'} \left| \left(\vec{l}_{24} \right)_\mu \right| Y_{LM_L} \right\rangle \quad (\text{D.52})$$

Pour calculer l'élément de matrice (D.51) nous introduisons un nouveau jeu de variable $\vec{t}, \vec{u}, \vec{R}, \vec{R}'$ tel que :

$$\vec{r}_{24} = \beta''_{ij;kl} \vec{u} \Rightarrow \vec{p}_{24} = -i \vec{\nabla}_{\vec{r}_{24}} = -\frac{i}{\beta''_{ij;kl}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \quad (\text{D.53})$$

et donc

$$\vec{l}_u = -i \vec{u} \wedge \vec{\nabla}_{\vec{u}} \quad (\text{D.54})$$

où $\beta''_{ij;kl}$ et toutes les quantités ayant $(ik; jl)$ pour indice sont des constantes qui ne dépendent que de $\alpha_i, \alpha_j, \gamma_k, \gamma_l$.

En faisant agir à droite l'opérateur moment cinétique \vec{l}_u sur la fonction d'onde KN dans ce nouveau système de coordonnées, notre élément de matrice devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24_{ik;jl}}(r', r, L) = & \frac{1}{r} \frac{1}{r'} \int d^3 t \int d^3 u \int d^3 R \int d^3 R' \\ & e^{-L'_{ij;kl} \vec{t}^2 - M'_{ij;kl} \vec{u}^2 - A'_{ij;kl} \vec{R}^2 - B'_{ij;kl} \vec{R}'^2} \times \\ & e^{-E'_{ij;kl} \vec{u} \cdot \vec{R} - N'_{ij;kl} \vec{u} \cdot \vec{R}' - D'_{ij;kl} \vec{R} \cdot \vec{R}'} \delta(R' - r') Y_L(\hat{R}') \times \\ & V_{24}^{(ls)}(|\beta''_{ij;kl} \vec{u}|) \times \\ & i \vec{u} \wedge \left(\xi_{1_{ij;kl}} \vec{t} + H'_{ij;kl} \vec{R} + I'_{ij;kl} \vec{R}' \right) \Big| \delta(R - r) Y_L(\hat{R}) \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

Nous aurons donc 3 termes à calculer.

Premier terme

Pour calculer le premier terme nous utilisons (D.12) :

$$i\xi_{1ij;kl} \vec{u} \wedge \vec{t} = \sqrt{2} \frac{4\pi}{3} \xi_{1ij;kl} \|\vec{u}\| \|\vec{t}\| [Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{t})]_1 \quad (D.56)$$

et lors de l'intégration sur \vec{t} nous verrons apparaître :

$$\int e^{-L'_{ij;kl} \vec{t}^2} t^3 Y_{1\eta}(\hat{t}) d^3t = 0 \quad (D.57)$$

Nous en déduisons que ce premier terme est nul.

Second terme

Nous avons :

$$iH'_{ij;kl} \vec{u} \wedge \vec{R} = \sqrt{2} \frac{4\pi}{3} H'_{ij;kl} \|\vec{u}\| \|\vec{R}\| [Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R})]_1 \quad (D.58)$$

L'intégrale sur \vec{t} se fait immédiatement :

$$\int e^{-L'_{ij;kl} \vec{t}^2} d^3t = \left(\frac{\pi}{L'_{ij;kl}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (D.59)$$

Grâce aux développements en harmoniques sphériques suivants :

$$e^{-E'_{ij;kl} \vec{u} \cdot \vec{R}} = 4\pi \sum_{l_1=0}^{\infty} \sqrt{2l_1+1} \varphi_{l_1} i_{l_1} (|E'_{ij;kl}| uR) [Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R})]_0 \quad (D.60)$$

$$e^{-N_{ij;kl} \vec{u} \cdot \vec{R}'} = 4\pi \sum_{l_2=0}^{\infty} \sqrt{2l_2+1} \varphi_{l_2} i_{l_2} (|N_{ij;kl}| uR') [Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}')]_0 \quad (D.61)$$

$$e^{-D'_{ij;kl} \vec{R} \cdot \vec{R}'} = 4\pi \sum_{l_3=0}^{\infty} \sqrt{2l_3+1} \varphi_{l_3} i_{l_3} (|D'_{ij;kl}| RR') [Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}')]_0 \quad (D.62)$$

où

$$\varphi_{l_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } N_{ij;kl} > 0 \\ (-1)^{l_i} & \text{si } N_{ij;kl} < 0 \end{cases} \quad (D.63)$$

Nous trouvons pour ce second élément de matrice, en passant aux éléments de matrice réduit grâce à (D.52),

$$\begin{aligned}
R_2(r', r, L)_{ij;kl} = & \frac{1}{r} \frac{1}{r'} \left(\frac{\pi}{L'_{ij;kl}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{(4\pi)^4}{3} H'_{ij;kl} \sum_{l_1, l_2, l_3} \sqrt{2l_1 + 1} \sqrt{2l_2 + 1} \times \\
& \sqrt{2l_3 + 1} \varphi_{l_1} \varphi_{l_2} \varphi_{l_3} \int du e^{-M'_{ij;kl} \vec{u}^2} u^3 V_{24}^{(ls)} (||\beta''_{ij;kl} \vec{u}||) \int dR e^{-A'_{ij;kl} \vec{R}^2} R^3 \times \\
& \delta(R - r) i_{l_1} (|E'_{ij;kl}| u R) \int dR' e^{-B'_{ij;kl} \vec{R}'^2} R'^2 \delta(R' - r') i_{l_2} (|N_{ij;kl}| u R') \times \\
& i_{l_3} (|D'_{ij;kl}| R R') \left\langle Y_L(\hat{R}') \right| \left| \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \right. \right. \\
& \left. \left. \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_1 \right\}_1 \right| Y_L(\hat{R}) \rangle \quad (D.64)
\end{aligned}$$

De plus les relations qui suivent sur le couplage des harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_1 \right\}_1 = \\
& \sum_{l_4, l_5} (-1)^{l_4 + l_5} \frac{\sqrt{2l_4 + 1} \sqrt{2l_5 + 1}}{\sqrt{2l_1 + 1}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_4 & l_5 \end{matrix} \right\} \times \\
& \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{u}) \right]_{l_4} \otimes \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_{l_5} \right\}_1 \quad (D.65)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \right\}_0 \\
= & \left\{ Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \right]_{l_2} \right\}_0 = \\
& \sum_{l_6} \frac{\sqrt{2l_6 + 1}}{\sqrt{2l_2 + 1} \sqrt{2l_3 + 1}} \times \\
& \left\{ Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_{l_6} \right]_{l_2} \right\}_0 \quad (D.66)
\end{aligned}$$

Nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \right. \\
& \left. \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_1 \right\}_1 \\
= & \sum_{l_4, l_5, l_6, l_7, l_8} \frac{\sqrt{2l_4 + 1} \sqrt{2l_5 + 1} \sqrt{2l_6 + 1} \sqrt{2l_7 + 1} \sqrt{2l_8 + 1}}{\sqrt{2l_1 + 1} \sqrt{2l_3 + 1} (2l_2 + 1)} \\
& (-1)^{1+l_1+l_2+l_8} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_4 & l_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & l_4 & l_5 \\ l_2 & l_8 & l_7 \end{matrix} \right\} \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \quad (D.67)
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) = \{[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{u})]_{l_4} \otimes Y_{l_2}(\hat{u})\}_{l_7} \quad (\text{D.68})$$

$$\mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') = \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_{l_5} \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes [Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_3}(\hat{R}')]_{l_6} \right]_{l_2} \right\}_{l_8} \quad (\text{D.69})$$

L'élément de matrice réduit intervenant dans (D.64) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \\ &= 4\pi \left\langle \left[Y_0(\hat{u}) Y_L(\hat{R}') \right]_L \left\| \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \right\| \left[Y_0(\hat{u}) Y_L(\hat{R}) \right]_L \right\rangle \\ &= 4\pi \delta_{l_7,0} \delta_{l_8,1} \langle Y_0(\hat{u}) \| \mathcal{O}_0(\hat{u}) \| Y_0(\hat{u}) \rangle \times \\ & \quad \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

L'application de la relation (D.20) donne :

$$\langle Y_0(\hat{u}) \| \mathcal{O}_0(\hat{u}) \| Y_0(\hat{u}) \rangle = \delta_{l_4,l_2} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l_1+1}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} (-1)^{l_2} \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle \quad (\text{D.71})$$

Pour calculer l'élément de matrice réduit $\left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle$ de (D.70) nous avons besoin :

$$\mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') = \sum_{l_9} (-1)^{1+l_3+l_5+l_6} \sqrt{2l_2+1} \sqrt{2l_9+1} \begin{Bmatrix} l_5 & l_3 & l_9 \\ l_6 & 1 & l_2 \end{Bmatrix} \left[\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}) \mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}') \right]_1 \quad (\text{D.72})$$

$$\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}) = \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_{l_5} Y_{l_3}(\hat{R}) \right\}_{l_9} \quad (\text{D.73})$$

$$\mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}') = \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_{l_6} \quad (\text{D.74})$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} & \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle = 4\pi \sum_{l_9} (-1)^{1+l_3+l_5+l_6} \\ & \quad \sqrt{2l_2+1} \sqrt{2l_9+1} \begin{Bmatrix} l_5 & l_3 & l_9 \\ l_6 & 1 & l_2 \end{Bmatrix} \\ & \quad \left\langle Y_0(\hat{R}) Y_L(\hat{R}') \left\| \left[\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}) \mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}') \right]_1 \right\| Y_L(\hat{R}) Y_0(\hat{R}') \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.75})$$

La relation (D.7) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \left\langle Y_0 \left(\widehat{R} \right) Y_L \left(\widehat{R}' \right) \left\| \left[\mathcal{O}_{l_9}(\widehat{R}) \mathcal{O}_{l_6}(\widehat{R}') \right]_1 \right\| Y_L \left(\widehat{R} \right) Y_0 \left(\widehat{R}' \right) \right\rangle \\
&= -\delta_{l_9,L} \delta_{l_6,L} \frac{\sqrt{3}}{2L+1} \left\langle Y_0 \left(\widehat{R} \right) \left\| \mathcal{O}_L(\widehat{R}) \right\| Y_L \left(\widehat{R} \right) \right\rangle \times \\
& \quad \left\langle Y_L \left(\widehat{R}' \right) \left\| \mathcal{O}_L(\widehat{R}') \right\| Y_0 \left(\widehat{R}' \right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{D.76}$$

Nous savons calculer les différents éléments de (D.76) à partir de (D.19) et (D.20) :

$$\begin{aligned}
& \left\langle Y_0 \left(\widehat{R} \right) \left\| \mathcal{O}_L(\widehat{R}) \right\| Y_L \left(\widehat{R} \right) \right\rangle \\
&= (-1)^L \frac{\sqrt{3} \sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_3+1}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \langle l_1 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle
\end{aligned} \tag{D.77}$$

$$\left\langle Y_L \left(\widehat{R}' \right) \left\| \mathcal{O}_L(\widehat{R}') \right\| Y_0 \left(\widehat{R}' \right) \right\rangle = \frac{\sqrt{2l_2+1} \sqrt{2l_3+1}}{4\pi} \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \tag{D.78}$$

Nous trouvons, en regroupant chaque contribution :

$$\begin{aligned}
& \left\langle Y_L \left(\widehat{R}' \right) \left\| \left[\mathcal{O}_{l_7}(\widehat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\widehat{R}, \widehat{R}') \right]_1 \right\| Y_L \left(\widehat{R} \right) \right\rangle \\
&= (-1)^{1+l_1+l_2+l_3} 3\sqrt{3} \frac{\sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_3+1}}{(4\pi)^2} \times \\
& \quad \sum_{l_5} \sqrt{2l_5+1} \langle l_1 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} l_3 & l_5 & L \\ 1 & L & l_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_5 \end{matrix} \right\} \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle
\end{aligned} \tag{D.79}$$

Si nous effectuons les intégrales radiales (D.64) nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
R_2(r', r, L)_{ij;kl} &= 3\sqrt{2} (4\pi)^2 r^2 r'^2 H'_{ij;kl} \left(\frac{\pi}{L'_{ij;kl}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-A'_{ij;kl} r^2} e^{-B'_{ij;kl} r'^2} \times \\
& \quad \sum_{l_1, l_2, l_3, l_5} (-1)^{l_1+l_2+l_3+1} \varphi_{l_1} \varphi_{l_2} \varphi_{l_3} (2l_1+1) (2l_2+1) \times \\
& \quad (2l_3+1) \sqrt{2l_5+1} \langle l_1 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\
& \quad \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle \times \left\{ \begin{matrix} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_5 \end{matrix} \right\} \times \\
& \quad i_{l_3} (|D'_{ij;kl}| r r') \int d\vec{u} e^{-M'_{ij;kl} \vec{u}^2} u^3 V_{24}^{(ls)} (||\beta \vec{u}'||) \times \\
& \quad i_{l_1} (|E'_{ij;kl}| u r) i_{l_2} (|N_{ij;kl}| u r')
\end{aligned} \tag{D.80}$$

Troisième terme

Le calcul de ce terme, noté $T_3(r', r, L)_{ij;kl}$, diffère du précédent par :

$$iI'_{ij;kl} \vec{u} \wedge \vec{R} = \sqrt{2} \frac{4\pi}{3} I'_{ij;kl} \|\vec{u}\| \|\vec{R}\| \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}) \right]_1 \quad (\text{D.81})$$

L'élément de matrice réduit s'écrit donc :

$$\begin{aligned} R_3(r', r, L)_{ij;kl} = & \frac{1}{r} \frac{1}{r'} \left(\frac{\pi}{L'_{ij;kl}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \frac{(4\pi)^4}{3} I'_{ij;kl} \sum_{l_1, l_2, l_3} \sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_2+1} \times \\ & \sqrt{2l_3+1} \varphi_{l_1} \varphi_{l_2} \varphi_{l_3} \int du e^{-M'_{ij;kl} \vec{u}^2} u^3 V_{24}^{(ls)}(\|\beta \vec{u}\|) \int dR e^{-A'_{ij;kl} \vec{R}^2} R^2 \times \\ & \delta(R-r) i_{l_1}(|E'_{ij;kl}| u R) \int dR' e^{-B'_{ij;kl} \vec{R}'^2} R'^3 \delta(R'-r') i_{l_2}(|N_{ij;kl}| u R') \\ & i_{l_3}(|D'_{ij;kl}| R R') \left\langle Y_L(\hat{R}') \right\rangle \left\| \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \right. \right. \\ & \left. \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \right. \\ & \left. \left. \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_1 \right\} \right\| Y_L(\hat{R}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.82})$$

En utilisant comme précédemment :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_1 \right\}_1 = \\ & \sum_{l_4, l_5} (-1)^{l_4+l_5} \frac{\sqrt{2l_4+1} \sqrt{2l_5+1}}{\sqrt{2l_2+1}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_2 & l_4 & l_5 \end{matrix} \right\} \times \\ & \left\{ \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{u}) \right]_{l_4} \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_{l_5} \right\}_1 \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

et

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}') \otimes Y_{l_3}(\hat{R}) \right]_0 \right\}_0 \\ & = \sum_{l_6} \frac{\sqrt{2l_6+1}}{\sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_3+1}} \times \\ & \left\{ Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes \left[Y_{l_3}(\hat{R}') \otimes \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}) \right]_{l_6} \right]_{l_1} \right\}_0 \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[Y_{l_1}(\hat{u}) \otimes Y_{l_1}(\hat{R}) \right]_0 \otimes \left[Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_{l_2}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \right. \\
& \left. \left[Y_{l_3}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}') \right]_0 \otimes \left[Y_1(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_1 \right\}_1 \\
= & \sum_{l_4, l_5, l_6, l_7, l_8} \frac{\sqrt{2l_4+1}\sqrt{2l_5+1}\sqrt{2l_6+1}\sqrt{2l_7+1}\sqrt{2l_8+1}}{\sqrt{2l_2+1}\sqrt{2l_3+1}(2l_1+1)} \\
& (-1)^{1+l_1+l_2+l_8} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_4 & l_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & l_4 & l_5 \\ l_2 & l_8 & l_7 \end{matrix} \right\} \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \quad (D.85)
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) = \{ [Y_{l_2}(\hat{u}) \otimes Y_1(\hat{u})]_{l_4} \otimes Y_{l_1}(\hat{u}) \}_{l_7} \quad (D.86)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') = & \left\{ \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_{l_5} \otimes \right. \\
& \left. \left[Y_{l_3}(\hat{R}') \otimes \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}) \right]_{l_6} \right]_{l_1} \right\}_{l_8} \quad (D.87)
\end{aligned}$$

L'élément de matrice réduit présent dans (D.82) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \\
= & 4\pi \left\langle \left[Y_0(\hat{u}) Y_L(\hat{R}') \right]_L \left\| \left[\mathcal{O}_{l_7}(\hat{u}) \mathcal{O}_{l_8}(\hat{R}, \hat{R}') \right]_1 \right\| \left[Y_0(\hat{u}) Y_L(\hat{R}) \right]_L \right\rangle \\
= & 4\pi \delta_{l_7,0} \delta_{l_8,1} \langle Y_0(\hat{u}) \| \mathcal{O}_0(\hat{u}) \| Y_0(\hat{u}) \rangle \times \\
& \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \quad (D.88)
\end{aligned}$$

où, à partir de (D.19) :

$$\langle Y_0(\hat{u}) \| \mathcal{O}_0(\hat{u}) \| Y_0(\hat{u}) \rangle = \delta_{l_4, l_1} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l_2+1}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} (-1)^{l_1} \langle l_2 0 1 0 | l_1 0 \rangle \quad (D.89)$$

De plus nous pouvons montrer que :

$$\mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') = \sum_{l_9} (-1)^{1+l_3+l_5+l_6} \sqrt{2l_1+1} \sqrt{2l_9+1} \left\{ \begin{matrix} l_5 & l_3 & l_9 \\ l_6 & 1 & l_1 \end{matrix} \right\} \left[\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}') \mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}) \right]_1 \quad (D.90)$$

$$\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}) = \left\{ \left[Y_{l_2}(\hat{R}') \otimes Y_1(\hat{R}') \right]_{l_5} Y_{l_3}(\hat{R}') \right\}_{l_9} \quad (\text{D.91})$$

$$\mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}') = \left[Y_{l_1}(\hat{R}) \otimes Y_{l_3}(\hat{R}) \right]_{l_6} \quad (\text{D.92})$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} & \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \left[\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}') \mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}) \right]_1 \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \\ &= 4\pi \left\langle Y_L(\hat{R}') Y_0(\hat{R}) \left\| \left[\mathcal{O}_{l_9}(\hat{R}') \mathcal{O}_{l_6}(\hat{R}) \right]_1 \right\| Y_0(\hat{R}') Y_L(\hat{R}) \right\rangle \\ &= 4\pi \frac{\sqrt{3}}{2L+1} \delta_{l_9,L} \delta_{l_6,L} \delta_{l_4,l_1} \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_L(\hat{R}') \right\| Y_0(\hat{R}') \right\rangle \times \\ & \quad \left\langle Y_0(\hat{R}) \left\| \mathcal{O}_L(\hat{R}) \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.93})$$

Les résultats établis au tout début de cette annexe (D.20) donnent :

$$\begin{aligned} & \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_L(\hat{R}') \right\| Y_0(\hat{R}') \right\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{2l_3+1}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \langle l_2 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.94})$$

et

$$\left\langle Y_0(\hat{R}) \left\| \mathcal{O}_L(\hat{R}) \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle = (-1)^L \frac{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{2l_3+1}}{4\pi} \langle l_1 0 l_3 0 | L 0 \rangle \quad (\text{D.95})$$

Ainsi, la valeur de la quantité définie en (D.88) est :

$$\begin{aligned} & \left\langle Y_L(\hat{R}') \left\| \mathcal{O}_1(\hat{R}, \hat{R}') \right\| Y_L(\hat{R}) \right\rangle \\ &= (-1)^{1+l_3+l_5} 3 \frac{\sqrt{2l_2+1}(2l_3+1)(2l_1+1)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2L+1}} \delta_{l_6,L} \times \\ & \quad \langle l_2 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_1 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\ & \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & L & L \\ l_3 & l_1 & l_5 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.96})$$

Si nous effectuons les intégrales radiales (D.82) nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned}
R_3(r', r, L)_{ij;kl} = & \sqrt{6} (4\pi)^2 r r'^2 I'_{ij;kl} \left(\frac{\pi}{L'_{ij;kl}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-A'_{ij;kl} r^2} e^{-B'_{ij;kl} r'^2} \times \\
& \sum_{l_1, l_2, l_3, l_5} (-1)^{l_1+l_2+l_3+1} \varphi_{l_1} \varphi_{l_2} \varphi_{l_3} \sqrt{(2l_1+1)} (2l_2+1) \times \\
& (2l_3+1) \sqrt{2l_5+1} \langle l_2 0 1 0 | l_5 0 \rangle \langle l_1 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\
& \langle l_5 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_2 0 1 0 | l_1 0 \rangle \times \left\{ \begin{matrix} 1 & L & L \\ l_3 & l_1 & l_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_5 \end{matrix} \right\} \times \\
& i_{l_3} (|D'_{ij;kl}| r r') \int du e^{-M'_{ij;kl} \vec{u}^2} u^3 V_{24}^{(ls)} (||\beta \vec{u}||) \times \\
& i_{l_1} (|E'_{ij;kl}| u r) i_{l_2} (|N'_{ij;kl}| u r') \quad (D.97)
\end{aligned}$$

Si nous réécrivons $R_3(r', r, L)_{ij;kl}$ en changeant $l_2 \longleftrightarrow l_1$ nous pouvons regrouper l'ensemble couleur-spin-isospin-espace sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned}
V_{24}(r', r, J, L; I)_{ls}^{(e)} &= F_I^{24} (-1)^{J+L+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ L & L & J \end{matrix} \right\} \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_i a_j c_k c_l V_{24}^{(ls)}(r', r, L) \\
\text{avec } V_{24}^{(ls)}(r', r, L) &= \left(\frac{\pi}{L'_{ik;jl}} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 r r' e^{-(A'_{ik;jl} r^2 + B'_{ik;jl} r'^2)} \times \\
& \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{1+l_1+l_2} (2l_1+1) (2l_3+1) \sqrt{(2l_2+1)(2l_4+1)} \langle l_2 0 l_3 0 | L 0 \rangle \times \\
& \langle l_4 0 l_3 0 | L 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_2 0 \rangle \langle l_1 0 1 0 | l_4 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & L & L \\ l_3 & l_2 & l_4 \end{matrix} \right\} \phi_{l_3} i_{l_3} (r r' | D'_{ik;jl} |) \times \\
& \int_0^\infty e^{-M'_{ik;jl} u^2} V_{24}^{(ls)} (|\beta''_{ik;jl}| u) \times [r H'_{ik;jl} \phi_{l_1} \phi_{l_2} i_{l_2} (u r' | N'_{ik;jl} |) i_{l_1} (u r | E'_{ik;jl} |) \\
& - r' I'_{ik;jl} \phi_{l_2} \phi_{l_1} i_{l_1} (u r' | N'_{ik;jl} |) i_{l_2} (u r | E'_{ik;jl} |)] u^3 du \\
\text{avec } F_{I=0}^{24} &= -\frac{1}{12} ; F_{I=1}^{24} = \frac{5}{36}
\end{aligned} \right. \quad (D.98)$$

Bibliographie

- [1] R. Büttgen et al., Nucl. Phys. **A506** (1990) 586
- [2] G. Holzwarth, B. Schwesinger, Rep. Prog. Phys. **49** (1986) 825
- [3] A. W. Thomas, Advances in Nuclear Physics, Vol. 13, p. 1, ed. J. W. Negele et Vogt (Plenum, New-York)
- [4] H. J. Lipkin, Nucl. Phys. **A446** (1985) 409 c
- [5] W.R. Coker, J.D. Lumpe and L. Ray, Phys. Rev. **C31** (1985) 1412
- [6] Y. Abgrall, R. Belaidi and J. Labarsouque, Nucl. Phys. **A462** (1987) 781
- [7] A. S. Carroll et al., Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 806
- [8] C. B. Dover, G. E. Walker, Phys. Rev. **C19** (1979) 1393
- [9] R. W. Bland et al., Nucl. Phys. **B13** (1969) 595
- [10] A. S. Carroll et al., Phys. Lett. **45B** (1973) 531
- [11] B. R. Martin, Nucl. Phys. **B94** (1975) 413
- [12] S. Goldhaber et al., Phys. Rev. Lett **9** (1962) 135
- [13] B. R. Martin et G. C. Oades, Rapport de la IV^{ème} conférence sur les résonances baryoniques, Toronto, édité par N. Isgur (1981)
- [14] T. F. Stubbs et al., Phys. Rev. Lett. **7** (1961) 188
- [15] R. L. Cool et al., Phys. Rev. **D1** (1970) 1887
- [16] G. W. Meisner et F. S. Crawford, Phys. Rev. **D3** (1971) 2553
- [17] A. A. Hirata et al., Nucl. Phys. **B33** (1971) 525
- [18] G. Giacomelli et al., Nucl. Phys. **B37** (1972) 577
- [19] K. Nakajima et al., Phys. Lett. **112B** (1982) 75
- [20] U. Adams et al., Nucl. Phys. **B87** (1975) 41
- [21] R. M. Edelstein et al., Phys. Rev. **D14** (1976) 702
- [22] J. C. M. Armitage et al., Nucl. Phys. **B123** (1977) 11
- [23] A. K. Ray et al., Phys. Rev. **183** (1969) 1183
- [24] W. Slater et al., Phys. Rev. Lett. **7** (1961) 378
- [25] A. A. Hirata et al., Nucl. Phys. **B30** (1971) 157
- [26] G. Giacomelli et al., Nucl. Phys. **B42** (1972) 437

- [27] C. J. S. Damerell et al., Nucl. Phys. **B94** (1975) 374
- [28] R. G. Glasser et al., Phys. Rev. **D15** (1977) 1200
- [29] M. Sakitt, J. Skelly et J. Thompson, Phys. Rev. **D15** (1977) 1846
- [30] A. A. Hirata et al., Phys. Rev. Lett **21** (1968) 1485
- [31] V. J. Stenger et al., Phys. Rev. **134B** (1964) 1111
- [32] G. Giacomelli et al., Nucl. Phys. **B56** (1973) 346
- [33] G. Giacomelli et al., Nucl. Phys. **B68** (1974) 285
- [34] M. Sakitt, J. Skelly et J. Thompson, Phys. Rev. **D12** (1975) 3386
- [35] S. Focardi et al., Phys. Lett. **24B** (1967) 314
- [36] R. A. Arndt et al., Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 987
- [37] R. A. Arndt et al., Phys. Rev. **D31** (1985) 2230
- [38] J.S. Hyslop, R.A. Arndt, L.D. Roper and R.L. Workman, Phys. Rev. **D46** (1992) 961 and private communication
- [39] K. Hashimoto, Phys. Rev. **C29** (1984) 1377
- [40] J. W. Alcock et al., Nucl. Phys. **B31** (1971) 443
- [41] J. W. Alcock et al., Nucl. Phys. **B56** (1973) 301
- [42] A. C. Davis et al., Nucl. Phys. **B111** (1976) 233
- [43] Collaboration BGRT, Nucl. Phys. **B71** (1974) 138
- [44] R. Aaron et al., Phys. Rev. **D7**(1973) 1401
- [45] J. W. Alcock et al., Nucl. Phys. **B102** (1976) 173
- [46] R. E. Cutkosky et al., Nucl. Phys. **B102** (1976) 139
- [47] W. N. Cottingham et al., Nucl. Phys. **B91** (1975) 509
- [48] E. A. Veit, A. W. Thomas et B. K. Jennings, Phys. Rev. **D31** (1985) 2242
- [49] I. Bender, H.G. Dosch, Z. Phys. **C13** (1982) 69
- [50] I. Bender, H.G. Dosch, H.J. Pirner, H.G Kruse, Nucl. Phys. **A414** (1984) 359
- [51] R.K. Campbell, D. Robson, Phys. Rev. **D36** (1987) 9682
- [52] P. Bicudo, J.E. Ribeiro, Z. Phys. **C38** (1988) 453
- [53] R. Bhaduri, L. Cohler, T. Nogami, Nuovo Cimento **65A** (1981) 376
- [54] B. Silvestre-Brac, J. Leandri and J. Labarsouque, Nucl. Phys. **A589** (1995) 585
- [55] B. Silvestre-Brac and C. Semay, Int. Report (1993) ISN93-69
- [56] T. Barnes, E.S. Swanson, Phys. Rev. **C49** (1994) 1166
- [57] B. Silvestre-Brac, J. Labarsouque and J. Leandri, Nucl. Phys. **A613** (1997) 342
- [58] D. Mukhopadhyay, H.J. Pirner, Nucl. Phys. **A442** (1985) 605
- [59] A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, Phys. Rev. **D12** (1975) 47
- [60] R. Ceuleneer et C. Semay, Phys. Rev. **C59** (1999)1081, private communication
- [61] F. Brau and C. Semay, Phys. Rev. **E59** (1999) 1207

- [62] F. Brau and C. Semay, J. Comput. Phys. **139** (1998) 127
- [63] S. Lemaire, J. Labarsouque et B. Silvestre-Brac, Nucl. Phys. **A696** (2001) 247
- [64] S. Lemaire, J. Labarsouque et B. Silvestre-Brac, Nucl. Phys. **700** (2002) 330
- [65] A. T. Lea, B. R. Martin et G. C. Oades, Phys. Rev. **165** (1968) 1770
- [66] A. D. Martin et R. Perrin, Nucl. Phys. **B10** (1969) 125
- [67] R. E. Cutkosky et B. B. Deo, Phys. Rev. **D1** (1970) 2547
- [68] B. R. Martin et G. D. Thompson, Nucl. Phys. **B22** (1970) 285
- [69] M. G. Albrow et al., Nucl. Phys. **B30** (1971) 273
- [70] W. Cameron et al., Nucl. Phys. **B78** (1974) 93
- [71] G. Giacomelli et al., Nucl. Phys. **B20** (1970) 301
- [72] R. Chand, Ann. Phys. **42** (1967) 81
- [73] K. Bräuer, A. Faessler, F. Fernandez et K. Shimizu, Nucl. Phys. **A507** (1990) 599
- [74] Y. W. Yu, Z. Y. Zhang, P. N. Shen et L. R. Dai, Phys. Rev. **C52** (1995) 3393
- [75] F. Fernandez et al. communication privée